TP4 : CHAÎNES DE MARKOV

Exercice 1 [Chaîne d'Ehrenfest modifiée]. Un ensemble de d balles numérotées de 1 à d est réparti dans deux boîtes B_1 et B_2. On choisit un nombre i au hasard entre 1 et d, puis on tire au hasard (avec équiprobabilité) l'indice $j \in \{1, 2\}$ de la la boîte dans laquelle on place la balle numéro i. On note X_n le nombre de balles dans B_1 après n tirages. La suite $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov.

(1) Précisez sa matrice de transition, et montrez que la chaîne est irréductible et apériodique. Avez-vous une idée intuitive de la loi invariante de cette chaîne ?

(2) On suppose que $X_0 = 0$. Ecrivez une fonction de `n`, `d` et `N` qui simule `N` trajectoires $(X_1, \ldots, X_n)$. (Il serait bon que cette fonction ne contienne qu'une seule boucle `for`.) Simulez des réalisations de $(X_1, \ldots, X_n)$ et tracez-les.

(3) Rappelez pourquoi la suite des X_n converge en loi vers la loi limite. Pour N et n grands, réalisez N simulations de X_n, et comparez l'histogramme des réalisations à celui de votre loi candidate. Aviez-vous raison ?

(4) Retrouvez par le calcul cette loi limite. A cet effet, ecrivez une fonction qui construit la matrice de transition de la chaîne, pour le paramètre d qui lui est donné en argument. Quelle est ensuite l'opération d'algèbre linéaire qui vous donne la loi invariante ? Effectuez.

Exercice 2 [Bruit qui court]. Une personne pose une question dont la réponse ne peut être que « oui » ou « non ». Cette réponse est donnée à travers n intermédiaires. Chaque intermédiaire a la même probabilité $p \in [0, 1]$ de transmettre le message correctement.

(1) Modélisez la transmission du message par une chaîne de Markov homogène $(X_1, X_2, \ldots)$, dont on précisera la matrice de transition P. Donnez les caractéristiques de cette chaîne : classes de récurrence, périodicité le cas échéant. Qu'en déduisez-vous en ce qui concerne une mesure invariante associée à la chaîne ?

(2) Ecrivez une fonction (de n) simulant une trajectoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de la chaîne.

(3) On rappelle le théorème ergodique :

Théorème 1. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible récurrente positive de probabilité invariante μ. Soit f une fonction positive telle que $\int f d\mu < \infty$. Alors pour tout état x on a, $\mathbb{P}_x$ presque sûrement,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} f(X_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f d\mu.$$

Illustrez graphiquement ce théorème pour la chaîne de Markov $(X_k)_{k\geq 1}$.

(4) Que peut-on dire de la loi de X_n ? Calculez, par des calculs matriciels dans Matlab, la probabilité théorique $\mathbb{P}(X_n = 1)$. Illustrez graphiquement la convergence de cette probabilité. Puis essayez de voir quelle est la vitesse de convergence ; à cet effet, faites varier p, et représentez le nombre d'itérations nécessaires pour chaque p pour que Matlab ne distingue plus la loi de X_n (donnée par $\mu_0 P^n$) de sa loi limite. Arriverez-vous à vérifier l'affirmation du théorème SLEM (*Second Largest Eigenvalue Modulus*) selon lequel cette convergence a lieu avec une vitesse $|1 - 2p|^n$?

Exercice 3. Un gène est composé de d allèles dont m sont mutants et $d-m$ sont normaux. Avant la division de la cellule, le gène se duplique. Le gène d'une des deux cellules sœurs se compose alors de d allèles pris au hasard parmi les $2m$ allèles mutants et les $2(d-m)$ allèles normaux. On suit une filiation donnée. Soit X_n le nombre d'allèles mutants du gène de cette filiation à la n-ième génération. On forme ainsi une chaîne de Markov.

(1) Ecrivez la matrice de transition de la chaîne pour $d = 3$ et simulez une trajectoire de la chaîne. Comment appelle-t-on les états 0 et 3 ?

(2) On note T_0 (respectivement T_3) les temps d'atteinte de ces états. Vérifiez numériquement les résultats suivants :

$$\mathbb{P}_1(T_0 < +\infty) = 2/3, \qquad \mathbb{P}_1(T_3 < +\infty) = 1/3 \ ,$$

où $\mathbb{P}_1$ indique que X_0 est constant égal à 1. (A quel théorème faites-vous appel ?)

(3) On considère maintenant $T_P = \min(T_0,\ T_3)$ le temps d'atteinte d'un puits (d'un état absorbant). Essayez d'estimer $\mathbb{E}\,[T_P]$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 4 [Ruine du joueur]. Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec une pièce non biaisée. Lorsque la pièce tombe sur pile, A donne 1 euro à B ; pour face, c'est B qui donne 1 euro à A. A et B démarrent avec chacun a et b euros. Soit X_n la fortune de A au temps n. Ainsi, $X_0 = a$. Le jeu s'arrête lorsque A est ruiné ($X_n = 0$ pour un certain n) ou lorsque B est ruiné ($X_n = a + b$ pour un certain n).

Modéliser ce jeu par une chaîne de Markov homogène. Trouver la probabilité que A gagne, d'abord à l'aide de Matlab, puis par le calcul. Pour cela, on pourra noter $u_k = \mathbb{P}(\exists n, X_n = a+b | X_0 = k)$ et trouver une relation entre u_k, u_{k-1} et u_{k+1} de façon à en déduire u_k puis u_a.

Exercice 5 [Chaîne de naissance et mort]. Une chaîne de naissance et de mort est une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'espace d'état formé par les entiers naturels, $\mathbb{N}$, de transitions paramétrées par un réel $p \in]0,1[$ (m désigne ci-dessous un élément de $\mathbb{N}^*$) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\,[X_{n+1} = 0 \,|\, X_n = 0] &= 1-p \ , \\
\mathbb{P}\,[X_{n+1} = 1 \,|\, X_n = 0] &= p \ , \\
\mathbb{P}\,[X_{n+1} = m-1 \,|\, X_n = m] &= 1-p \ , \\
\mathbb{P}\,[X_{n+1} = m+1 \,|\, X_n = m] &= p \ .
\end{aligned}$$

On montre que cette chaîne est irréductible, apériodique, et récurrente positive si $p < 1/2$, récurrente nulle si $p = 1/2$ et transiente pour $p > 1/2$.

(1) Ecrivez une fonction qui simule cette chaîne (les paramètres de cette fonction sont p et la valeur initiale de la chaîne). Pour vous familiariser avec l'évolution de cette chaîne, tracez des trajectoires pour $p = 1/2$, $p < 1/2$, $p > 1/2$.

(2) Simulez des réalisations de la suite suivante :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \mathbb{1}_{X_t = 3} \right)_{n \geq 1} .$$

Quels sont les comportements en fonction de p ? Dans les cas où la suite converge, vers quoi converge-t-elle ?

(3) On se place désormais dans le cas récurrent positif (prenez par exemple $p = 1/4$). Il existe une unique probabilité invariante. Essayez de calculer une autre approximation de la valeur de la probabilité invariante en 3 (pensez à des temps de retour). Comparez avec la valeur précédente.

Exercice 6 [Protocole ALOHA stabilisé]. Un grand nombre d'utilisateurs partage un même canal de transmission, chacun d'entre eux émettant aléatoirement, et indépendamment des autres, des informations (selon, par exemple, une loi commune, de Bernoulli, de paramètre p très petit). Ainsi, on peut approximer l'arrivée de nouveaux messages par une loi de Poisson μ, de paramètre $\lambda > 0$. Le problème est que deux messages ne peuvent pas passer à la fois dans le canal. Lorsque deux messages ou plus essaient de passer en même temps, il se produit des interférences et on les stocke temporairement dans une mémoire tampon. Cette mémoire est gérée de la manière suivante. A l'instant suivant de fonctionnement de la chaîne, chacun des messages du tampon est réémis ou non avec une probabilité $\nu > 0$ fixe (de sorte que le nombre total de messages réémis en provenance du tampon suit une loi binomiale de paramètres la taille du tampon et ν). S'il n'y a pas de nouveau message arrivant, et qu'un seul des messages du tampon demande à être réémis, alors cela est possible, et le tampon se vide du message considéré. Si aucun message ne demande à être réémis, et qu'un seul message arrive, celui-ci passe directement. Dans tous les autres cas (arrivée d'au moins un message nouveau et tentative de réémission d'au moins un message du tampon, tentative de réémission d'au moins deux messages du tampon, ou arrivée d'au moins deux messages) le tampon non seulement ne se réduit pas, mais dans certains de ces cas, augmente. Plus précisément, on note X_n le nombre de messages dans le tampon à l'instant (discrétisé) n. On part de $X_0 = 0$. On a formé ainsi une chaîne de Markov, dont on note P la matrice de transition.

(1) Montrer que pour $i \geq 0$,

$$P(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \leq i-2 \\ \mu(0)b_i(1) & \text{si} \quad j = i-1 \\ (1-b_i(1))\,\mu(0) + b_i(0)\mu(1) & \text{si} \quad j = i \\ (1-b_i(0))\,\mu(1) & \text{si} \quad j = i+1 \\ \mu(j-i) & \text{si} \quad j \geq i+2\ , \end{cases}$$

où $b_i(k)$ désigne la probabilité qu'une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres i et ν prenne la valeur k, avec la convention $b_0(0) = 1, b_0(1) = 0$. Montrer que cette chaîne est irréductible.

(2) Expliquer pourquoi on peut prendre comme critère de stabilité du système la récurrence positive de la chaîne.

Bien que cette chaîne soit apériodique, on montre qu'elle n'est malheureusemnt pas récurrente positive : elle est ou transiente, ou récurrente nulle. Dit autrement, il n'existe pas de probabilité invariante. On appelle ce cas le cas instable. Dans le cas où $\lambda < e^{-1}$, une méthode de stabilisation consiste à changer la politique de réémission du tampon, en faisant dépendre ν de la taille du tampon. Pour une taille $i \geq 1$, chacun des éléments du tampon sera réémis indépendamment des autres avec probabilité $\nu(i)$, où

$$(*) \qquad \nu(i) = \frac{\mu(0) - \mu(1)}{i\mu(0) - \mu(1)}\ .$$

On montre que la chaîne ainsi obtenue est toujours homogène, irréductible, apériodique, et cette fois-ci, récurrente positive.

(3) Simulez des trajectoires de chacune des deux versions, et comparez-les. Vous pouvez aussi tracer l'histogramme de la taille du tampon.

Questions subsidiaires : preuve de la la récurrence positive de la chaîne à l'aide du lemme de Pakes.

Lemme de Pakes . *Soit* (X_n) *une chaîne de Markov irréductible sur* $\mathbb{N}$ *telle que pour tout* $n \geq 0$ *et tout* $i \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n = i) < \infty$ *et*

$$\limsup_{i\to\infty} \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|X_n = i) < 0.$$

Alors (X_n) *est récurrente positive.*

(4) Montrer que pour $i \geq 1$, $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|X_n = i) = \lambda - b_i(1)\mu(0) - b_i(0)\mu(1)$.

(5) Montrer qu'avec le choix $(*)$, on obtient

$$\forall i \geq 1 \qquad \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|X_n = i) = \lambda - \mu(0)\frac{\left(1 - \frac{1}{i}\right)^{i-1}}{\left(1 - \frac{\mu(1)}{\mu(0)i}\right)^{i-1}}.$$

(6) En déduire que si $\lambda < \mu(0)e^{\mu(1)/\mu(0)-1}$ (c'est-à-dire si $\lambda < e^{-1}$) le lemme de Pakes s'applique.