

Utilisation des ondelettes en statistiques

Claire LACOUR

14 janvier 2005

Table des matières

1	Décomposition en ondelettes	3
1.1	Analyse multirésolution	3
1.2	Eléments pour la construction d'ondelettes	5
1.3	Exemples de bases d'ondelettes	8
1.3.1	La base de Haar	8
1.3.2	Une idée de construction : ondelettes de Daubechies	8
2	Espaces de Besov et approximation	10
2.1	Espaces de Besov	10
2.2	Décomposition de Littlewood-Paley	11
2.3	Un théorème d'approximation	13
2.4	Noyaux de projection orthogonale	15
3	Application aux Statistiques	17
3.1	Différents estimateurs	17
3.2	Approximation d'une densité appartenant à un espace de Besov .	18
3.3	Exemples	21
3.3.1	Estimation d'une densité	21
3.3.2	Débruitage	23
4	Bibliographie	25

Introduction

La théorie des ondelettes est récente : elle est née au milieu des années 80. Et pourtant, elle est déjà utilisée dans de nombreux domaines qu'ils soient théoriques ou pratiques : analyse harmonique, vision par ordinateur, traitement du signal, compression d'images, analyse de turbulences, etc.. Son succès est dû à son adaptativité aux données et à sa facilité d'implémentation.

Une ondelette est une onde "localisée". Lorsqu'on décompose une fonction en séries de Fourier, on la décompose en fait en fréquence. La décomposition en ondelettes ajoute une dimension, la décomposition est double : en fréquence mais aussi en espace. Une fonction est ainsi représentée comme une somme d'oscillations de fréquences précises se produisant à un endroit précis, c'est-à-dire une somme d'ondelettes. C'est pour cela que cette théorie représente "bien" les données.

Ici, nous allons d'abord expliquer comment on obtient cette décomposition spatiale et fréquentielle à l'aide de ce qu'on appelle une analyse multirésolution. Puis nous chercherons à construire une base d'ondelettes c'est-à-dire une famille d'ondelettes permettant de décomposer toute fonction.

Dans un deuxième temps, on introduira les espaces de Besov, espaces de fonction particulièrement adaptés à l'approximation par ondelettes et nous donnerons un théorème qui permet d'approcher une fonction par une somme finie d'ondelettes.

La troisième partie sera consacrée à l'application de cette théorie aux statistiques. On utilisera les théorèmes précédents pour estimer une densité inconnue ou pour débruiter un signal. Il existe en fait différents estimateurs selon la façon dont on tronque la série d'ondelettes. On terminera en comparant graphiquement ces différentes estimations.

Chapitre 1

Décomposition en ondelettes

1.1 Analyse multirésolution

On considère $L_2(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur $\mathbb{R}$ de carré intégrable muni du produit scalaire

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Définition 1 Une famille de fonctions $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est appelée famille orthonormale si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) \overline{\varphi_l(x)} dx = \delta_{kl},$$

$$\text{où } \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}.$$

Elle est appelée base orthonormale du sous-espace V de $L_2(\mathbb{R})$ si

$$\forall f \in V, f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_k(x) \text{ avec } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty.$$

Soit φ une fonction de $L_2(\mathbb{R})$. On pose

$$\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2} \varphi(2^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}.$$

On définit les espaces

$$V_0 = \{f(x) = \sum_k c_k \varphi(x - k), \sum_k |c_k|^2 < \infty\},$$

et pour $j \in \mathbb{Z}$, $V_j = \{h(x) = f(2^j x), f \in V_0\}$.

On suppose que $(\varphi_{0k})_{k \in \mathbb{Z}} = (\varphi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale. Dans ce cas pour tout $j \in \mathbb{Z}$ $(\varphi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de V_j . On dit alors que φ engendre la suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

Définition 2 Soit $(\varphi_{0k})_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille orthonormale de $L_2(\mathbb{R})$. Si les espaces V_j engendrés par φ vérifient :

$$\begin{aligned} & \forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1} \\ & \bigcup_{j \geq 0} V_j \text{ est dense dans } L_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

alors la suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est appelée une analyse multirésolution (MRA) de $L_2(\mathbb{R})$.

Définition 3 Si $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une MRA de $L_2(\mathbb{R})$, on dit que φ engendre une MRA et on appelle φ ondelette-père.

Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une MRA. Soit W_j le sous-espace de V_{j+1} tel que

$$\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

On a alors

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = \dots = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j = V_0 \oplus \bigoplus_{l=0}^j W_l$$

D'où

$$L_2(\mathbb{R}) = \overline{\bigcup_{j \geq 0} V_j} = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j.$$

Ainsi, en notant pour tout j $(\psi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$ une base de W_j , toute fonction de $L_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la série (convergente dans $L_2(\mathbb{R})$) :

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi_{0k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk}(x)$$

Les coefficients d'ondelettes sont

$$\alpha_k = \int f(x) \overline{\varphi_{0k}(x)} dx, \quad \beta_{jk} = \int f(x) \overline{\psi_{jk}(x)} dx$$

Définition 4 S'il existe une fonction ψ de $L_2(\mathbb{R})$ telle que $(\psi_{jk}(x))_{k \in \mathbb{Z}} = (2^{j/2} \psi(2^j x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de W_j alors cette fonction est appelée ondelette-mère et le développement précédent est appelé développement en ondelettes de f .

Remarque 1 On a fait débiter le développement de V_0 mais on peut aussi bien commencer à un niveau j_0 arbitraire. Par le même raisonnement, on obtient le développement

$$f(x) = \sum_k \alpha_{j_0 k} \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k \beta_{jk} \psi_{jk}(x)$$

Nous avons donc trouvé une décomposition dans une base d'ondelettes. Il reste cependant à résoudre les problèmes suivants :

- Comment trouver φ telle que $(\varphi_{0k})_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une famille orthonormale ?
- Sous quelles conditions a-t-on $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$?
- Sous quelles conditions $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ est-elle dense dans $L_2(\mathbb{R})$?
- Comment trouver une ondelette-mère ψ ?

La section suivante va nous permettre de répondre à ces questions.

1.2 Éléments pour la construction d'ondelettes

Proposition 1 Soit $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. La famille $(\varphi_{0k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale si et seulement si

$$\sum_k |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (p.p.).$$

où $\hat{\varphi}$ est la transformée de Fourier de φ . φ est alors appelée fonction d'échelle.

Démonstration : Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} \forall k, \forall l \quad \int \varphi(x-k) \overline{\varphi(x-l)} dx &= \delta_{kl} \Leftrightarrow \forall k \quad \int \varphi(x) \overline{\varphi(x-k)} dx = \delta_{0k} \\ \Leftrightarrow q(k) &= \delta_{0k} \quad \text{où} \quad q = \varphi * \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}. \end{aligned}$$

On a $\hat{q} = |\hat{\varphi}|^2 \in L_1(\mathbb{R})$. D'après la formule de sommation de Poisson, les coefficients de Fourier de la série $\sum_k \hat{q}(x + 2\pi k)$ sont $(q(-k))_{k \in \mathbb{Z}}$. Ainsi

$$\sum_k |\hat{\varphi}(x + 2\pi k)|^2 = \sum_k q(-k) e^{ikx} \quad (p.p.)$$

Donc

$$\begin{aligned} (\varphi_{0k}) \text{ orthonormale} &\Leftrightarrow \sum_k |\hat{\varphi}(x + 2\pi k)|^2 = \sum_k \delta_{0k} e^{ikx} \quad (p.p.) \\ &\Leftrightarrow \sum_k |\hat{\varphi}(x + 2\pi k)|^2 = 1 \quad (p.p.) \end{aligned}$$

□

Proposition 2 Les espaces V_j sont emboîtés si et seulement s'il existe une fonction m_0 2π -périodique dont la restriction à $]0, 2\pi[$ est L_2 ($m_0 \in L_2^{per}(\mathbb{R})$) et telle que

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (p.p.) \quad (1.1)$$

Démonstration : Il suffit en fait de prouver la proposition pour $j = 0$ (car $V_0 \subset V_1 \Rightarrow \forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$).

Condition nécessaire : Supposons que $V_0 \subset V_1$. Comme $\varphi \in V_1$, elle s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k), \\ h_k &= \sqrt{2} \int \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx, \quad \sum_k |h_k|^2 < \infty \end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier de cette égalité, on a

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\xi/2} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (p.p.)$$

où $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\xi} \in L_2^{per}(\mathbb{R})$.

Condition suffisante :

Lemme 1 Soit φ telle que la famille $(\varphi_{0k})_{k \in \mathbb{Z}}$ soit orthonormale. Toute fonction m_0 de $L_2^{per}(\mathbb{R})$ vérifiant (1.1) vérifie

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (p.p.). \quad (1.2)$$

Démonstration : D'après (1.1),

$$|\hat{\varphi}(2\xi + 2\pi k)|^2 = |m_0(\xi + \pi k)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + \pi k)|^2.$$

Donc, en utilisant la proposition 1, on a p.p.

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |m_0(\xi + \pi k)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + \pi k)|^2 \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} |m_0(\xi + 2\pi l)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 \\ &\quad + \sum_{l=-\infty}^{\infty} |m_0(\xi + 2\pi l + \pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi l + \pi)|^2 \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi l)|^2 |m_0(\xi)|^2 + \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2\pi l + \pi)|^2 |m_0(\xi + \pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 \end{aligned}$$

□

On en déduit que m_0 est bornée. Soit maintenant $\hat{V}_0$ (resp $\hat{V}_1$) l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions de V_0 (resp V_1).

$$f \in V_0 \Rightarrow f(x) = \sum_k c_k \varphi(x - k) \Rightarrow \hat{f}(\xi) = \sum_k c_k e^{-ik\xi} \hat{\varphi}(\xi)$$

Donc

$$\begin{aligned} \hat{V}_0 &= \{\xi \mapsto m(\xi) \hat{\varphi}(\xi), m \in L_2^{per}(\mathbb{R})\} \\ \hat{V}_1 &= \{\xi \mapsto m(\frac{\xi}{2}) \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}), m \in L_2^{per}(\mathbb{R})\}. \end{aligned}$$

On suppose que $\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\frac{\xi}{2}) \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$ et m_0 bornée $\Rightarrow \xi \mapsto m(2\xi) m_0(\xi) \in L_2^{per}(\mathbb{R})$ donc $\hat{V}_0 \subset \hat{V}_1$. Finalement on a bien $V_0 \subset V_1$. □

Nous avons donc répondu aux deux premières questions. Pour la troisième question, on a le résultat suivant que nous démontrerons plus tard (section 2.4)

Proposition 3 Soit φ telle que la famille $(\varphi_{0k})_{k \in \mathbb{Z}}$ soit orthonormale et vérifiant (1.1), (1.2). On suppose de plus que $\sup_k |\varphi(x - k)| < \infty$ et que $\int \sum_k \varphi(x - k) \overline{\varphi(y - k)} dy = 1$. Alors $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ est dense dans $L_2(\mathbb{R})$.

En fait ces conditions sont assurées si on prend φ bornée à support compact (ce qui est souvent le cas dans la pratique). Nous allons maintenant répondre à la quatrième question.

Proposition 4 Soit φ une ondelette-père engendrant une MRA de $L_2(\mathbb{R})$ et m_0 une solution de (1.1). Alors la transformée de Fourier inverse ψ de

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1(\frac{\xi}{2}) \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}),$$

où $m_1(\xi) = \overline{m_0(\xi + \pi)} e^{-i\xi}$, est une ondelette-mère.

Démonstration : Nous allons prouver trois points :

1. $(\psi_{0k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale :

$$\begin{aligned}
 \sum_k |\hat{\psi}(\xi + 2\pi k)|^2 &= \sum_k |m_1(\frac{\xi}{2} + \pi k)|^2 |\hat{\psi}(\frac{\xi}{2} + \pi k)|^2 \\
 &= \sum_k |m_0(\frac{\xi}{2} + \pi + \pi k)|^2 |\hat{\psi}(\frac{\xi}{2} + \pi k)|^2 \\
 &= \sum_l |m_0(\frac{\xi}{2} + \pi + 2\pi l)|^2 |\hat{\psi}(\frac{\xi}{2} + 2\pi l)|^2 \\
 &\quad + \sum_l |m_0(\frac{\xi}{2} + \pi + 2\pi l + \pi)|^2 |\hat{\psi}(\frac{\xi}{2} + 2\pi l + \pi)|^2 \\
 &= |m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)|^2 + |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 = 1 \quad (p.p)
 \end{aligned}$$

D'après la proposition 1, $(\psi_{0k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale.

2. (ψ_{0k}) est orthogonale à (φ_{0k}) :

Remarquons d'abord qu'il suffit de prouver

$$\forall k \quad \int \varphi(x) \overline{\psi(x-k)} dx = 0 \Leftrightarrow \forall k \quad g(k) = \varphi * \tilde{\psi}(k) = 0$$

où $\tilde{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$. Soit $S(\xi) = \sum_k \hat{g}(\xi + 2\pi k)$ où $\hat{g} = \hat{\varphi} \hat{\tilde{\psi}} = \hat{\varphi} \bar{\hat{\psi}}$. D'après la formule de sommation de Poisson, les coefficients de Fourier de S sont $g(-k)$, $k \in \mathbb{Z}$. D'où

$$g(k) = 0 \quad \forall k \Leftrightarrow S(\xi) = 0 \quad (p.p.) \Leftrightarrow \sum_k \hat{\varphi}(\xi + 2\pi k) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2\pi k)} = 0 \quad (p.p.)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Or} \quad & \sum_k \hat{\varphi}(\xi + 2\pi k) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2\pi k)} \\
 &= \sum_k \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + \pi k) m_0(\frac{\xi}{2} + \pi k) \overline{\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + \pi k) m_0(\frac{\xi}{2} + \pi k + \pi) e^{-i\xi/2} e^{-i\pi k}} \\
 &= \sum_l |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + 2\pi l)|^2 m_0(\frac{\xi}{2} + 2\pi l) m_0(\frac{\xi}{2} + 2\pi l + \pi) e^{-i\xi/2} \\
 &\quad - \sum_l |\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2} + 2\pi l + \pi)|^2 m_0(\frac{\xi}{2} + 2\pi l + \pi) m_0(\frac{\xi}{2} + 2\pi l + 2\pi) e^{-i\xi/2} \\
 &= m_0(\frac{\xi}{2}) m_0(\frac{\xi}{2} + \pi) e^{-i\xi/2} - m_0(\frac{\xi}{2} + \pi) m_0(\frac{\xi}{2}) e^{-i\xi/2} = 0 \quad (p.p.)
 \end{aligned}$$

Donc $\forall k$, $g(k) = 0$ et $\forall k, \forall l$, $\int \varphi(x-k) \overline{\psi(x-l)} dx = 0$

3. Toute fonction f de V_1 a une unique représentation de la forme

$$f(x) = \sum_k c_k \varphi(x-k) + \sum_k c'_k \psi(x-k)$$

où $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ et $\sum_k |c'_k|^2 < \infty$. On sait que

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_k q_k \varphi(2x-k) \Rightarrow \hat{f}(\xi) = q(\frac{\xi}{2}) \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) (p.p.)$$

Observons maintenant que

$$1 = |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 + |m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)|^2 = |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 + |m_1(\frac{\xi}{2})|^2$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) &= \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})m_0(\frac{\xi}{2})\bar{m}_0(\frac{\xi}{2}) + \hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})m_1(\frac{\xi}{2})\bar{m}_1(\frac{\xi}{2}) \\
&= \hat{\varphi}(\xi)\bar{m}_0(\frac{\xi}{2}) + \hat{\psi}(\xi)\bar{m}_1(\frac{\xi}{2}) \\
\text{donc } \hat{f}(\xi) &= q(\frac{\xi}{2})\bar{m}_0(\frac{\xi}{2})\hat{\varphi}(\xi) + q(\frac{\xi}{2})\bar{m}_1(\frac{\xi}{2})\hat{\psi}(\xi)
\end{aligned}$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de cette égalité, on voit que f se décompose de manière unique dans la base $((\varphi_{0k}), (\psi_{0k}))_{k \in \mathbb{Z}}$. $\square$

1.3 Exemples de bases d'ondelettes

1.3.1 La base de Haar

Posons

$$\varphi(x) = \mathbf{1}_{x \in]0,1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin]0,1] \end{cases}$$

On voit immédiatement que $(\varphi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale. V_0 est en fait l'espace des fonctions de $L_2(\mathbb{R})$ constantes sur les intervalles $]k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$. Et, pour $j \in \mathbb{Z}$, V_j est l'espace des fonctions constantes sur les intervalles $] \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$. Ces espaces V_j sont emboîtés. De plus, l'espace des fonctions étagées étant dense dans $L_2(\mathbb{R})$, on a tout de suite $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2(\mathbb{R})$. Ainsi φ est une ondelette-père. Posons maintenant

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre sans difficulté que ψ est une ondelette-mère. Cette base d'ondelettes est appelée base de Haar.

1.3.2 Une idée de construction : ondelettes de Daubechies

On va chercher des ondelettes telles que $\hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)dx = 1$. Puisque $\hat{\varphi}(\xi) = m_0(\frac{\xi}{2})\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$, on va prendre φ telle que

$$\hat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\frac{\xi}{2^j}).$$

En choisissant bien m_0 , la série converge sur tout compact et on obtient une ondelette-père φ à support compact. On obtient ψ par

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1(\frac{\xi}{2})\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2}) = m_0(\frac{\xi}{2} + \pi)e^{-i\xi/2}\hat{\varphi}(\frac{\xi}{2})$$

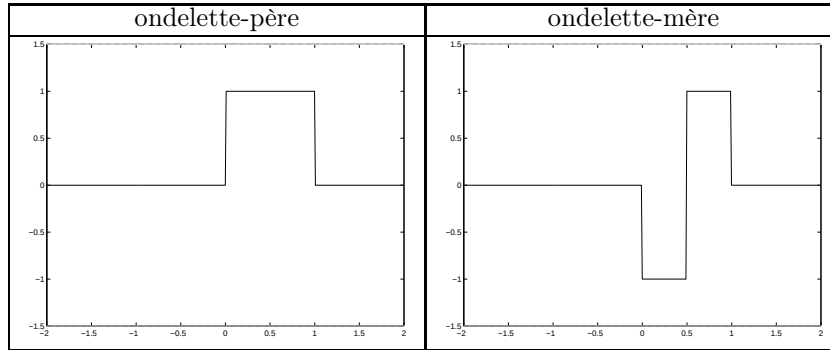
et cette ondelette-mère est également à support compact. De telles ondelettes sont très intéressantes pour l'implémentation informatique. Les ondelettes de Daubechies sont construites de cette façon en prenant

$$|m_0(\xi)|^2 = c_N \int_{\xi}^{\pi} \sin^{2N-1}(x)dx$$

où c_N est choisie de telle sorte que $m_0(0) = 1$. Ces ondelettes notées $D2N$ ont les propriétés suivantes :

- $Supp(\varphi) \subset [0, 2N - 1]$
- $Supp(\psi) \subset [-N + 1, N]$
- $\int \psi(x) x^l dx = 0 \quad 0 \leq l \leq N - 1$

Voici $D2$ qui est en fait la base de Haar.



Chapitre 2

Espaces de Besov et approximation

2.1 Espaces de Besov

Définition 5 Soit f une fonction de $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Soit

$$\Delta_h f(x) = f(x - h) - f(x)$$

et $\Delta_h^2 f = \Delta_h \Delta_h f$. Pour $t \neq 0$, on appelle modules de continuité les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_p^1(f, t) &= \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h f\|_p \\ \omega_p^2(f, t) &= \sup_{|h| \leq t} \|\Delta_h^2 f\|_p\end{aligned}$$

Lemme 2 Soit $f \in L_p(\mathbb{R})$, $t \neq 0$ et $s \neq 0$. On a les propriétés suivantes

1. $\omega_p^1(f, ts) \leq (s + 1)\omega_p^1(f, t)$
2. $\omega_p^2(f, ts) \leq (s + 1)^2\omega_p^2(f, t)$
3. $\omega_p^1(f, t) \leq t\|f'\|_p$, pour $f \in W_p^1(\mathbb{R})$ où $W_p^1(\mathbb{R})$ est l'espace de Sobolev $\{f \in L_p(\mathbb{R}), f \text{ dérivable et telle que } f' \in L_p(\mathbb{R})\}$

Démonstration :

1.

$$\Delta_{nh} f(x) = f(x - nh) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_h f(x - kh)$$

Donc $\omega_p^1(f, nt) \leq n\omega_p^1(f, t)$. Soit n l'entier tel que $n \leq s < n + 1$. Alors

$$\omega_p^1(f, st) \leq \omega_p^1(f, (n + 1)t) \leq (n + 1)\omega_p^1(f, t) \leq (s + 1)\omega_p^1(f, t).$$

2. Le raisonnement est le même en utilisant

$$\Delta_{nh}^2 f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \Delta_h^2 f(x - kh - lh)$$

qui implique $\omega_p^2(f, nt) \leq n^2\omega_p^2(f, t)$.

3. Si $f \in W_p^1(\mathbb{R})$, $\Delta_h f(x) = -h \int_0^1 f'(x - uh) du$ et $\|\Delta_h f\|_p \leq |h| \|f'\|_p$ d'où $\omega_p^1(f, t) \leq t \|f'\|_p$.

□

Définition 6 Soit $1 \leq q \leq \infty$ et ε une fonction de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{C}$. On définit la norme

$$\|\varepsilon\|_q^* = \begin{cases} (\int_0^\infty |\varepsilon(t)|^q \frac{dt}{t})^{1/q} & \text{si } 1 \leq q < \infty, \\ \sup_{t>0} |\varepsilon(t)| & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Définition 7 Soit $1 \leq p, q \leq \infty$ et $s = n + \alpha$ où $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0, 1]$. On dit que f appartient à l'espace de Besov $B_p^{sq}(\mathbb{R})$ si

$$f \in W_p^n(\mathbb{R}) \text{ et } \omega_p^2(f^{(n)}, t) = \varepsilon(t) t^\alpha$$

où $\|\varepsilon\|_q^* < \infty$ L'espace $B_p^{sq}(\mathbb{R})$ est muni de la norme

$$\|f\|_{spq} = \|f\|_{W_p^n} + \left\| \frac{\omega_p^2(f^{(n)}, t)}{t^\alpha} \right\|_q^*.$$

Proposition 5 Soit $l_q(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites u telles que $\sum_k |u_k|^q < \infty$. Alors $f \in B_p^{sq}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$f \in W_p^n(\mathbb{R}) \text{ et } (2^{j\alpha} \omega_p^2(f^{(n)}, 2^{-j}))_{j \in \mathbb{Z}} \in l_q(\mathbb{Z}).$$

Démonstration :

$$\int_0^\infty \left| \frac{\omega_p^2(f^{(n)}, t)}{t^\alpha} \right|^q \frac{dt}{t} = \sum_{j=-\infty}^\infty \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left| \frac{\omega_p^2(f^{(n)}, t)}{t^\alpha} \right|^q \frac{dt}{t}$$

et

$$\ln(2) \left| \frac{\omega_p^2(f^{(n)}, 2^j)}{2^{(j+1)\alpha}} \right|^q \leq \int_{2^j}^{2^{j+1}} \left| \frac{\omega_p^2(f^{(n)}, t)}{t^\alpha} \right|^q \frac{dt}{t} \leq \ln(2) \left| \frac{\omega_p^2(f^{(n)}, 2^{j+1})}{2^{j\alpha}} \right|^q$$

□

2.2 Décomposition de Littlewood-Paley

Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact et $S'(\mathbb{R})$ l'espace de Schwartz (espace des distributions sur les fonctions C^∞ telles que $\forall m, \forall p \quad |x^p f^{(m)}(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$). Soit γ une fonction paire telle que

- $\hat{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$
- $\text{Supp}(\hat{\gamma}) \subset [-A, A]$, $A > 0$
- $\hat{\gamma}(\xi) = 1$ pour $\xi \in [-\frac{3A}{4}, \frac{3A}{4}]$

Soit β une fonction telle que

$$\hat{\beta}(\xi) = \hat{\gamma}\left(\frac{\xi}{2}\right) - \hat{\gamma}(\xi).$$

Soit enfin pour $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j(x) = 2^j \beta(2^j x)$. On a alors

$$\sum_{j=0}^\infty \hat{\beta}_j(\xi) = \sum_{j=0}^\infty \hat{\beta}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \hat{\gamma}(0) - \hat{\gamma}(\xi).$$

Donc, pour toute $f \in S'(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(\xi) = \hat{\gamma}(\xi)\hat{f}(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\beta}_j(\xi)\hat{f}(\xi).$$

Notons $D_j f = \beta_j * f$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $D_{-1} f = \gamma * f$. Ainsi, on a

$$f = \sum_{j=-1}^{\infty} D_j f \text{ au sens des distributions,}$$

c'est à dire

$$\forall g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad (f - \sum_{j=-1}^{\infty} D_j f, g) = 0$$

Cette égalité est appelée *décomposition de Littlewood-Paley* de f .

Théorème 1 Soit $1 \leq p, q \leq \infty$, $s > 0$ et $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R})$. Alors

$$\|D_{-1} f\|_p < \infty \text{ et } (2^{js} \|D_j f\|_p)_{j \geq 0} \in l_q.$$

Démonstration : On suppose que $s = n + \alpha$, $\alpha \in]0, 1]$. En notant $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier, on a

$$\mathcal{F}[(\beta_j * f)^{(n)}](\xi) = (i\xi)^n \hat{\beta}(\frac{\xi}{2^j}) \hat{f}(\xi)$$

Donc

$$\hat{\beta}(\frac{\xi}{2^j}) \hat{f}(\xi) = 2^{-jn} (\frac{2^j}{i\xi})^n \mathcal{F}[(\beta_j * f)^{(n)}](\xi)$$

$$\mathcal{F}[D_j f](\xi) = 2^{-jn} (-i)^n \hat{\gamma}_n(\frac{\xi}{2^j}) \mathcal{F}[(\beta_j * f)^{(n)}](\xi)$$

où $\hat{\gamma}_n(\xi) = \frac{\delta(\xi)}{\xi^n}$, et δ est une fonction de $\mathbb{R}$ égale à 1 sur le support de $\hat{\beta}$ et 0 ailleurs. Ainsi

$$\|D_j f\|_p \leq \|\gamma_n\|_1 2^{-jn} \|(\beta_j * f)^{(n)}\|_p = \|\gamma_n\|_1 2^{-jn} \|\beta_j * f^{(n)}\|_p$$

Il nous reste à majorer $\|\beta_j * f^{(n)}\|_p$. Comme $\hat{\beta}_j(0) = 0$, on a $\int \beta_j(y) dy = 0$ et de plus β_j est paire. D'où :

$$\begin{aligned} \beta_j * f^{(n)}(x) &= \int \beta_j(y) f^{(n)}(x - y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int \beta_j(y) [f^{(n)}(x - y) - 2f^{(n)}(x) + f^{(n)}(x + y)] dy \\ &= \frac{1}{2} \int \beta_j(y) [f^{(n)}(x - 2^{-j}y) - 2f^{(n)}(x) + f^{(n)}(x + 2^{-j}y)] dy \end{aligned}$$

On obtient donc, en utilisant le lemme 2

$$\begin{aligned} \|\beta_j * f^{(n)}\|_p &\leq \int |\beta_j(y)| \omega_p^2(f^{(n)}, 2^{-j}|y|) dy \\ &\leq \omega_p^2(f^{(n)}, 2^{-j}) \int |\beta_j(y)| (1 + |y|^2) dy \\ &\leq C_1 \omega_p^2(f^{(n)}, 2^{-j}) \end{aligned}$$

où C_1 est une constante strictement positive. Finalement

$$\begin{aligned} 2^{js} \|D_j f\|_p &\leq C_1 \|\gamma_n\|_1 2^{j(s-n)} \omega_p^2(f^{(n)}, 2^{-j}) \\ &= C_2 2^{j\alpha} \omega_p^2(f^{(n)}, 2^{-j}) \end{aligned}$$

Comme $f \in B_p^{sq}(\mathbb{R})$, par définition, on a $(2^{j\alpha} \omega_p^2(f^{(n)}, 2^{-j})) \in l_q(\mathbb{Z})$. Donc $(2^{js} \|D_j f\|_p)_{j \geq 0} \in l_q$. Enfin

$$\|D_{-1} f\|_p = \|\gamma * f\|_p \leq \|\gamma\|_1 \|f\|_p < \infty$$

□

Lemme 3 Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L_p(\mathbb{R})$. Supposons que le support de la transformée de Fourier de f soit inclus dans l'intervalle $[-R, R]$, $R > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \|f^{(n)}\|_p \leq CR^n \|f\|_p.$$

Démonstration : Considérons la fonction γ avec $A = 2$ et posons $\gamma^*(x) = R\gamma(Rx)$. On a donc $\hat{\gamma}^*(\xi) = \hat{\gamma}(\frac{\xi}{R})$. Comme $\text{Supp}(\hat{f}) \subset [-R, R]$, on a $\hat{f}(\xi) = \hat{\gamma}^*(\xi) \hat{f}(\xi)$ et donc $f = \gamma^* * f$. On en déduit $f^{(n)} = f * (\gamma^*)^{(n)}$. D'où

$$\|f^{(n)}\|_p \leq \|(\gamma^*)^{(n)}\|_1 \|f\|_p$$

Or

$$\|(\gamma^*)^{(n)}\|_1 = \int R^{n+1} |\gamma^{(n)}(Rx)| dx = R^n \|\gamma^{(n)}\|_1$$

Donc

$$\|f^{(n)}\|_p \leq \|\gamma^{(n)}\|_1 R^n \|f\|_p$$

□

2.3 Un théorème d'approximation

Définition 8 Soit K un noyau (fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$). On définit les conditions suivantes :

Condition H Il existe une fonction intégrable F telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |K(x, y)| \leq F(x - y)$$

Condition H(N) Condition $H + \int |x|^N F(x) dx < \infty$

Condition M(N) Condition $H(N) +$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq k \leq N \quad \int K(x, y)(y - x)^k dy = \delta_{0k}$$

On note $K_j(x, y) = 2^j K(2^j x, 2^j y)$ et $K_j f = \int K_j(x, y) f(y) dy$.

Théorème 2 Soit K un noyau vérifiant les conditions $M(N)$ et $H(N+1)$. Soit $1 \leq p, q \leq \infty$ et $0 < s < N + 1$. Si $f \in B_p^{sq}(\mathbb{R})$ alors

$$\|K_j f - f\|_p = 2^{-js} \varepsilon_j \text{ avec } (\varepsilon_j)_{j \geq 0} \in l_q.$$

Démonstration : Soit $g_k = D_k f$ et $\sum_{k=-1}^{\infty} g_k$ la décomposition de Littlewood-Paley de f . Alors $K_j f - f$ a pour décomposition de Littlewood-Paley $\sum_{k=-1}^{\infty} (K_j g_k - g_k)$ et

$$\begin{aligned} \|K_j f - f\|_p &\leq \sum_{k=-1}^{\infty} \|K_j g_k - g_k\|_p \\ &\leq \sum_{k=-1}^j \|K_j g_k - g_k\|_p + \sum_{j+1}^{\infty} (\|F\|_1 + 1) \|g_k\|_p \end{aligned}$$

car $H(N+1) \Rightarrow \|K_j g_k\|_p \leq \|F * g_k\|_p \leq \|F\|_1 \|g_k\|_p$. D'après le théorème 1, on a

$$\|g_k\|_p = 2^{-ks} \varepsilon'_k \text{ où } (\varepsilon'_k)_{k \geq 0} \in l_q.$$

Comme $\hat{g}_k = \hat{\beta}_k \hat{f}$, le support de $\hat{g}_k$ est inclus dans $[-2^{k+1}A, 2^{k+1}A]$ et on peut donc appliquer le lemme 3 :

$$\|g_k^{(N+1)}\|_p \leq C 2^{(N+1)k} \|g_k\|_p \leq C 2^{(N+1-s)k} \varepsilon'_k$$

où C est une constante. Rappelons la formule de Taylor pour $g \in W_p^N(\mathbb{R})$

$$g(y) = \sum_{k=0}^N \frac{g^{(k)}(x)}{k!} (y-x)^k + R_N g(y, x) \text{ où}$$

$$R_N g(y, x) = \int_0^1 (y-x)^N \frac{(1-u)^{N-1}}{(N-1)!} [g^{(N)}(x+u(y-x)) - g^{(N)}(x)] du$$

D'après la condition M(N), $\int K(x, y) = 1$ et pour $0 < k \leq N$ $\int K(x, y)(y-x)^k = 0$ Donc

$$K_j g(x) = g(x) + \int K_j(x, y) R_N g(y, x)$$

En faisant le changement de variable $x - y = t 2^{-j}$, on obtient

$$|K_j g(x) - g(x)| \leq \int_0^1 du \int_{\mathbb{R}} |t 2^{-j}|^N F(t) \frac{(1-u)^{N-1}}{(N-1)!} |g^{(N)}(x - ut 2^{-j}) - g^{(N)}(x)| dt$$

$$\|K_j g_k - g_k\|_p \leq \int_0^1 du \int_{\mathbb{R}} |t 2^{-j}|^N F(t) \frac{(1-u)^{N-1}}{(N-1)!} \|g_k^{(N)}(\cdot - ut 2^{-j}) - g_k^{(N)}\|_p dt$$

Or

$$\|g_k^{(N)}(\cdot - ut 2^{-j}) - g_k^{(N)}\|_p \leq \omega_p^1(g_k^{(N)}, |tu| 2^{-j}) \leq (1 + |tu|) \omega_p^1(g_k^{(N)}, 2^{-j})$$

Donc

$$\|K_j g_k - g_k\|_p \leq 2^{-jN} \omega_p^1(g_k^{(N)}, 2^{-j}) \int_0^1 du \int_{\mathbb{R}} |t|^N F(t) (1 + |tu|) \frac{(1-u)^{N-1}}{(N-1)!} dt.$$

En utilisant la condition H(N+1), on obtient

$$\|K_j g_k - g_k\|_p \leq C' 2^{-jN} \omega_p^1(g_k^{(N)}, 2^{-j}).$$

Le lemme 2 donne

$$\omega_p^1(g_k^{(N)}, 2^{-j}) \leq 2^{-j} \|g_k^{(N+1)}\|_p$$

Ainsi

$$\|K_j g_k - g_k\|_p \leq C_2 2^{-j(N+1) + (N+1-s)k} \varepsilon'_k$$

Finalement

$$\|K_j f - f\|_p \leq C_3 2^{-js} \left[\sum_{k=-1}^j 2^{-(N+1-s)(j-k)} \varepsilon'_k + \sum_{j+1}^{\infty} 2^{-(k-j)s} \varepsilon'_k \right]$$

On reconnait des produits de convolution (discrets) entre $(\varepsilon'_k) \in l_q$ et (2^{-ks}) (resp. $(2^{-k(N+1-s)}) \in l_1$ d'où

$$\|K_j f - f\|_p = 2^{-js} \varepsilon_j$$

où $(\varepsilon_j) \in l_q$. □

2.4 Noyaux de projection orthogonale

Puisque $(\varphi_{jk})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de V_j la projection orthogonale de f sur V_j est

$$P_{V_j}(f) = \sum_k \eta_k \varphi_{jk} \text{ où } \eta_k = \int f(y) \overline{\varphi_{jk}(y)} dy$$

Définissons maintenant une condition sur φ :

Condition (θ) La fonction $\theta_\varphi(x) = \sum_k |\varphi(x-k)|$ vérifie

$$\sup_x \theta_\varphi(x) < \infty$$

On note

$$K(x, y) = \sum_k \varphi(x-k) \overline{\varphi(y-k)}$$

$$D(x, y) = \sum_k \psi(x-k) \overline{\psi(y-k)}$$

Proposition 6 Si φ satisfait (θ) et $f \in L_p(\mathbb{R})$ alors $P_{V_j}(f) = K_j f$ où $K_j(x, y) = \sum_k \varphi_{jk}(x) \overline{\varphi_{jk}(y)} = 2^j K(2^j x, 2^j y)$

Démonstration : Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_k \int |f(y) \overline{\varphi_{jk}(y)}| dy |\varphi_{jk}(x)| &\leq \sum_k \|f\|_p \|\varphi_{jk}\|_q |\varphi(2^j x - k)| \\ &\leq \|f\|_p \|\varphi_{jk}\|_q \theta_\varphi(2^j x) < \infty \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} P_{V_j}(f)(x) &= \sum_k \int f(y) \overline{\varphi(2^j y - k)} dy \varphi(2^j x - k) \\ &= \int f(y) [\sum_k \varphi(2^j x - k) \overline{\varphi(2^j y - k)}] dy \end{aligned}$$

□

Lemme 4 Si l'ondelette-père satisfait la condition (θ) alors l'ondelette-mère satisfait aussi (θ) .

Démonstration :

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \overline{h_k}(-1)^k e^{ik\frac{\xi}{2}} e^{-i\frac{\xi}{2}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Donc $\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k \overline{h_k}(-1)^k \varphi(2x + k - 1)$ avec $h_k = \int \varphi(x) \overline{\varphi(2x - k)} dx$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_l |\varphi(x - l)| &\leq \sqrt{2} \sum_k \sum_l |h_k| \varphi(2x - 2l + k - 1) \\ &\leq \sqrt{2} \sum_k |h_k| \|\theta_\varphi\|_\infty \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sum_k |h_k| &\leq \int \sum_k |\varphi(x) \varphi(2x - k)| dx \\ &\leq \|\theta_\varphi\|_\infty \int |\varphi(x)| dx \\ &\leq \|\theta_\varphi\|_\infty \sum_k \int_k^{k+1} t |\varphi(x)| dx \\ &\leq \|\theta_\varphi\|_\infty \int_0^1 \theta_\varphi(x) dx < \infty. \end{aligned}$$

□

Proposition 7 Si φ satisfait (θ) et $f \in L_p(\mathbb{R})$ alors $P_{W_j}(f) = D_j f$ où $D_j(x, y) = \sum_k \psi_{jk}(x) \overline{\psi_{jk}(y)} = 2^j D(2^j x, 2^j y)$

Démonstration : Puisque ψ vérifie (θ) , on peut faire la même démonstration que pour la proposition précédente. □

Proposition 8 Soit j_0 et j_1 des entiers. On a

$$K_{j_0} + \sum_{j=j_0}^{j_1} D_j = K_{j_1}$$

Démonstration :

$$(K_{j_0} + \sum_{j=j_0}^{j_1} D_j) f = (P_{V_{j_0}} + \sum_{j=j_0}^{j_1} P_{V_j})(f) = P_{V_{j_1}}(f)$$

car

$$V_{j_0} \oplus \bigoplus_{j=j_0}^{j_1} W_j = V_{j_1}$$

□

Proposition 9 Si φ vérifie (1.1), (1.2) et (θ) et si K vérifie $M(0)$ alors $\bigcup_{j \geq 0} V_j$ est dense dans $L_2(\mathbb{R})$.

Démonstration : Il suffit de prouver que pour toute fonction f de $L_2(\mathbb{R})$

$$\|P_{V_j}(f) - f\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \|K_j f - f\| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

Or

$$\begin{aligned} |K_j f(x) - f(x)| &= 2^j \int |K(2^j x, 2^j y)(f(y) - f(x))| dy \\ &\leq 2^j \int F(2^j(x - y)) |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \int F(t) |f(x - 2^{-j}t) - f(x)| dt \\ \|K_j f - f\|_2 &\leq \int F(t) \|f(\cdot - 2^{-j}t) - f\|_2 dt \end{aligned}$$

Or $\|f(\cdot - v) - f\|_2 \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0$ donc $\|K_j f - f\|_2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$. □

Chapitre 3

Application aux Statistiques

Toutes les ondelettes considérées maintenant seront à valeurs réelles.

3.1 Différents estimateurs

On cherche à estimer une densité inconnue f . Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de densité f . On définit l'estimateur de f suivant

$$\hat{f}_{j_1}(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{j_0 k} \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k \hat{\beta}_{jk} \psi_{jk}(x) \quad (3.1)$$

où

$$\hat{\alpha}_{j_0 k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_{j_0 k}(X_i)$$
$$\hat{\beta}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_{jk}(X_i)$$

sont des estimateurs empiriques de α_{jk} et β_{jk} . Remarquons que, en utilisant la section 2.4, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_k \varphi_{j_0 k}(x) \varphi_{j_0 k}(y) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \psi_{jk}(x) \psi_{jk}(y) \\ &= K_{j_0}(x, y) + \sum_{j=j_0}^{j_1} D_j(x, y) = K_{j_1}(x, y) \end{aligned}$$

Donc $\hat{f}_{j_1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{j_1}(x, X_i)$.

Cet estimateur est appelé *estimateur linéaire*. En fait, nous avons supprimé les coefficients β_{jk} dès que $j \geq j_1$. Cependant une autre procédure de sélection des β_{jk} peut sembler plus naturelle : ne garder que les β_{jk} les plus grands (inférieurs à un certain seuil t) qui traduisent les oscillations les plus grossières et supprimer ainsi les petites variations inutiles. Il existe deux méthodes de *seuillage* :

le seuillage doux où l'on remplace $\hat{\beta}_{jk}$ dans (3.1) par

$$\hat{\beta}_{jk}^S = (|\hat{\beta}_{jk}| - t)_+ \text{sign}(\hat{\beta}_{jk})$$

où $(y)_+ = \frac{y+|y|}{2}$ est la partie positive de y .

le seuillage dur pour lequel on remplace $\hat{\beta}_{jk}$ dans (3.1) par

$$\hat{\beta}_{jk}^H = \hat{\beta}_{jk} \mathbf{1}_{|\hat{\beta}_{jk}| > t}$$

l'estimateur de seuillage est défini par

$$f_{j_1}^*(x) = \sum_k \hat{\alpha}_{j_0 k} \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k \beta_{jk}^* \psi_{jk}(x)$$

où $\beta_{jk}^* = \hat{\beta}_{jk}^S$ ou bien $\beta_{jk}^* = \hat{\beta}_{jk}^H$.

3.2 Approximation d'une densité appartenant à un espace de Besov

Nous allons maintenant mesurer la qualité de nos estimateurs.

Définition 9 Soit $f \in L_p(\mathbb{R})$ une densité et $\hat{f}$ un estimateur de f . On appelle erreur de l'estimateur $\hat{f}$ la quantité suivante :

$$\mathbb{E} \|\hat{f} - f\|_p^p.$$

En fait on a

$$\mathbb{E} \|\hat{f} - f\|_p^p \leq 2^{p-1} [\mathbb{E} \|\hat{f} - \mathbb{E}(\hat{f})\|_p^p + \|\mathbb{E}(\hat{f}) - f\|_p^p]$$

et on voit que cette erreur se divise en deux termes :

l'erreur stochastique $\mathbb{E} \|\hat{f} - \mathbb{E}(\hat{f})\|_p^p$ due au caractère aléatoire des observations,

l'erreur de biais $\|\mathbb{E}(\hat{f}) - f\|_p^p$ due à la méthode d'estimation employée.

Définition 10 Soit L une constante strictement positive : on note $B(s, p, q, L)$ l'ensemble des densités f telles que

$$\|f\|_{spq} \leq L.$$

Théorème 3 Soit φ vérifiant la condition (θ) et $K(x, y) = \sum_k \varphi(x-k) \varphi(y-k)$ qui vérifie les conditions $H(N+1)$ et $M(N)$ avec $F \in L_p(\mathbb{R})$. Soit $0 < s < N+1$, $2 \leq p < \infty$ et $1 \leq q < \infty$. Alors, pour $2^{j_1} \leq n$

$$\sup_{f \in B(s, p, q, L)} \mathbb{E} \|\hat{f}_{j_1} - f\|_p^p \leq C [2^{-j_1 sp} + (\frac{2^{j_1}}{n})^{p/2}]$$

où C est une constante strictement positive.

Démonstration : Il nous faut majorer les deux types d'erreur :

erreur de biais En fait

$$\mathbb{E}(\hat{f}_{j_1}(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(K_{j_1+1}(x, X_i)) = K_{j_1+1}f(x)$$

L'erreur de biais est donc égale, d'après le théorème 2, à

$$\|K_{j_1+1}f - f\|_p^p = 2^{-(j_1+1)sp} \varepsilon_{j_1+1}^p$$

où $(\varepsilon_j) \in l_q$ Comme (ε_j) est bornée, on obtient

$$\|\mathbb{E}(\hat{f}_{j_1}) - f\|_p^p \leq C 2^{-j_1 sp}$$

erreur stochastique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\hat{f}_{j_1} - \mathbb{E}(\hat{f}_{j_1})\|_p^p &= \mathbb{E} \int \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{j_1+1}(x, X_i) - \mathbb{E}(K_{j_1+1}(x, X_i)) \right|^p dx \\ &= \int \mathbb{E} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i(x) \right|^p \right) dx \end{aligned}$$

où $Y_i(x) = K_{j_1+1}(x, X_i) - \mathbb{E}(K_{j_1+1}(x, X_i))$ sont des variables aléatoires centrées i.i.d. La condition (θ) implique $|K(x, y)| \leq \|\theta_\varphi\|_\infty^2$ donc $|K_{j_1+1}(x, y)| \leq 2^{j_1+1} \|\theta_\varphi\|_\infty^2$. Les variables aléatoires Y_i sont donc bornées par $2^{j_1+2} \|\theta_\varphi\|_\infty^2$. Nous allons maintenant admettre le lemme suivant

Lemme 5 *Si les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes centrées telles que $|Y_i| \leq M$, alors pour tout $p \geq 2$ il existe $C(p)$ telle que*

$$\mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n Y_i(x) \right|^p \right) \leq C(p) [M^{p-2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i^2) + \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i^2) \right)^{p/2}].$$

Or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_i^2)(x) &\leq \mathbb{E}(K_{j_1+1}^2(x, X_i)) \leq 2^{2j_1+2} \int F^2(2^{j_1+1}(x-y))f(y)dy \\ \int \mathbb{E}(Y_i^2)(x)dx &\leq 2^{j_1+1} \int \int F^2(v)f(y)dvdy \leq 2^{j_1+1} \int F^2(v)dv \end{aligned}$$

On en déduit en utilisant l'inégalité de Jensen que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{n^p} \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n Y_i(x) \right|^p \right) dx &\leq \frac{C(p)}{n^p} M^{p-2} n 2^{j_1+1} \int F^2(v)dv \\ &\quad + \frac{C(p)}{n^p} \int \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}(Y_i^2)(x))^{p/2} \\ &\leq \frac{C(p)}{n^p} (2^{j_1+2} \|\theta_\varphi\|_\infty^2)^{p-2} n 2^{j_1+1} \int F^2(v)dv \\ &\quad + \frac{C(p)}{n^{p/2}} 2^{(2j_1+2)p/2} \int [\int F^2(2^{j_1+1}(x-y))f(y)dy]^{p/2} dx \\ &\leq C(p) (2 \|\theta_\varphi\|_\infty^2)^{p-2} \int F^2(v)dv \left(\frac{2^{j_1+1}}{n} \right)^{p-1} \\ &\quad + C(p) \int F^p(v)dv \left(\frac{2^{j_1+1}}{n} \right)^{p/2} \end{aligned}$$

Comme $2^{j_1} \leq n$ et $p \geq 2$, on a $(\frac{2^{j_1}}{n})^{p-1} \leq (\frac{2^{j_1}}{n})^{p/2}$. Ainsi

$$\mathbb{E} \|\hat{f}_{j_1} - \mathbb{E}(\hat{f}_{j_1})\|_p^p \leq C' \left(\frac{2^{j_1}}{n}\right)^{p/2}$$

□

Définition 11 Si (a_n) et (b_n) sont deux suites, on note $a_n \simeq b_n$ ssi $\exists \quad 0 < A < B < \infty$ telles que pour n assez grand $A \leq \frac{a_n}{b_n} \leq B$.

Corollaire 1 Pour $j_1 = j_1(n)$ tel que $2^{j_1(n)} \simeq n^{\frac{1}{2s+1}}$, on a

$$\sup_{f \in B(s, p, q, L)} \mathbb{E} \|\hat{f}_{j_1} - f\|_p^p \leq C n^{-\frac{sp}{2s+1}}$$

Démonstration : La majoration donnée par le théorème est minimum lorsque ses deux termes sont du même ordre i.e.

$$2^{j_1 p/2 + j_1 s p} \simeq n^{p/2} \Leftrightarrow 2^{j_1} \simeq n^{\frac{1}{1+2s}}$$

On a alors

$$2^{-j_1 s p} \simeq \left(\frac{2^{j_1}}{n}\right)^{p/2} \simeq n^{-\frac{sp}{2s+1}}$$

□

En fait, on a un résultat beaucoup plus général (admis ici) qui est vrai quel que soit l'estimateur (même s'il n'est pas linéaire) et où le "p" qui définit l'erreur n'est pas le même que celui de l'espace de Besov. On note $\tilde{B}(s, r, q)$ l'ensemble des densités f ayant un support compact de longueur $\leq L'$ et telles que $\|f\|_{srq} \leq L$.

Définition 12 Soit $1 \leq p < \infty$ et V une classe de fonctions. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des estimateurs T_n de $f \in V$ où n est le nombre de X_i utilisés pour estimer f . Le risque minimax L_p est

$$R_n(V, p) = \inf_{T_n \in \mathcal{T}} \sup_{f \in V} \mathbb{E} \|T_n - f\|_p^p$$

Théorème 4 Soit $1 \leq r, q \leq \infty$, $s > \frac{1}{r}$ et $1 \leq p < \infty$. Il existe $C > 0$ telle que

$$R_n(\tilde{B}(s, r, q), p) \geq r_n(s, r, p, q)$$

où

$$r_n(s, r, p, q) = \begin{cases} n^{-\alpha_1 p}, & \alpha_1 = \frac{s}{2s+1}, & \text{si } r > \frac{p}{2s+1}, \\ (\frac{\log n}{n})^{-\alpha_2 p}, & \alpha_2 = \frac{s - \frac{1}{r} + \frac{1}{p}}{2(s - \frac{1}{r}) + 1}, & \text{si } r \leq \frac{p}{2s+1}. \end{cases}$$

On remarque que, pour l'approximation des fonctions d'un espace de Besov, l'espace des (r, p) est divisé en deux zones :

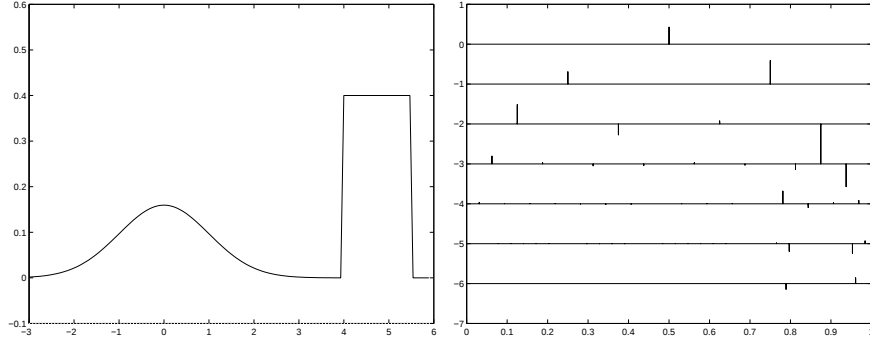
la zone régulière $r > \frac{p}{2s+1}$ (dans cette zone la convergence est aussi rapide que pour le cas $p = r$ vu précédemment),

la zone clairsemée $r \leq \frac{p}{2s+1}$ (la convergence est moins bonne).

3.3 Exemples

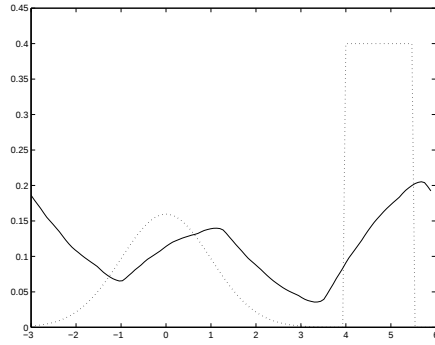
3.3.1 Estimation d'une densité

L'avantage de ces estimateurs, c'est leur facilité de construction en pratique. Ainsi, en utilisant l'extension WaveLab802 de Matlab, j'ai pu approximer la densité f suivante en n'utilisant que les réalisations de n variables aléatoires de densité f .

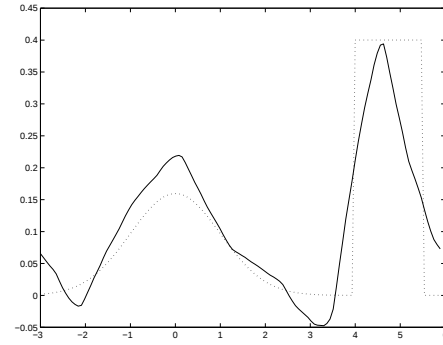


A droite du graphe de la fonction se trouve une représentation des coefficients β_{jk} de cette fonction où les différentes lignes représentent les différents niveaux de résolution j . Voici maintenant les estimations linéaires obtenues pour $n = 128$, $j_0 = 0$ et $j_1 = 1, 2, 4$ et 5 (l'ondelette utilisée est une ondelette à support compact appelée $S4$ ou "symmlet" d'ordre 4). L'erreur quadratique ISE (pour "integrated squared error") permet de mesurer la qualité de l'estimation

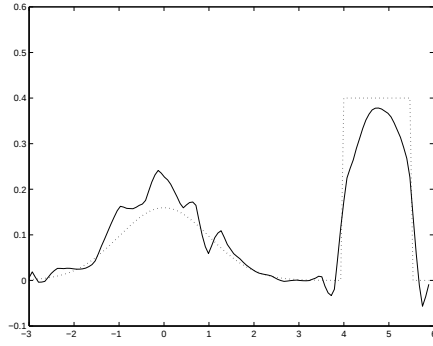
$$\text{ISE} = \int (\hat{f} - f)^2.$$



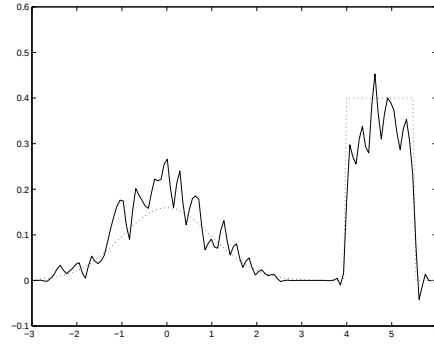
$j_1 = 1$, ISE=0.0167



$j_1 = 2$, ISE=0.0052

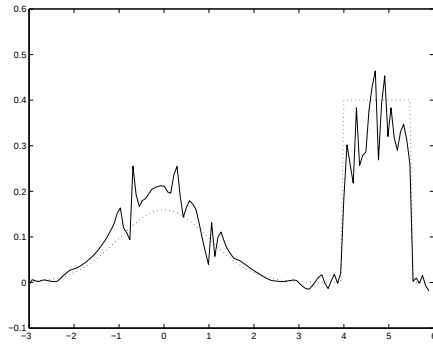


$j_1 = 4$, ISE=0.0028

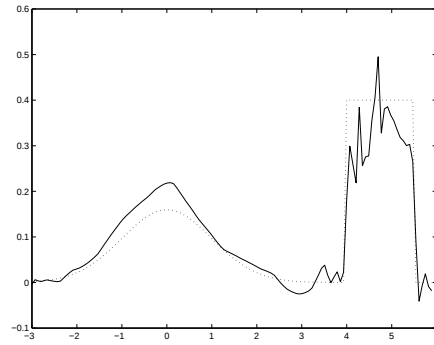


$j_1 = 5$, ISE=0.0026

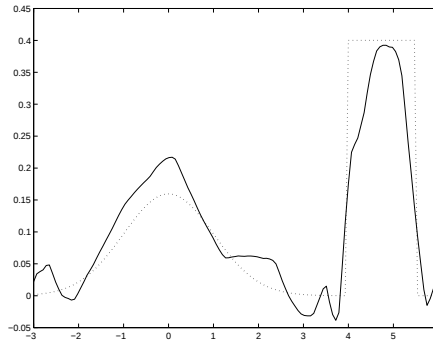
Le seuillage dur donne les résultats suivants ($n = 128$, $j_1 = 5$, seuil proportionnel à $t * \sqrt{2\log(n)}$). Le dernier graphique représente la variation de l'ISE en fonction du seuil.



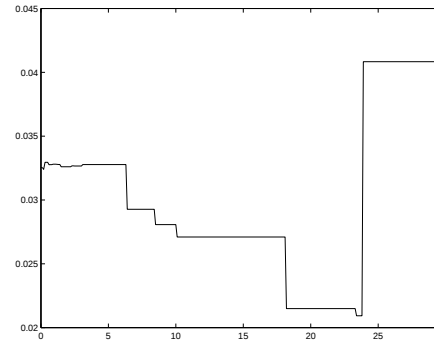
$t = 1$, ISE=0.0027



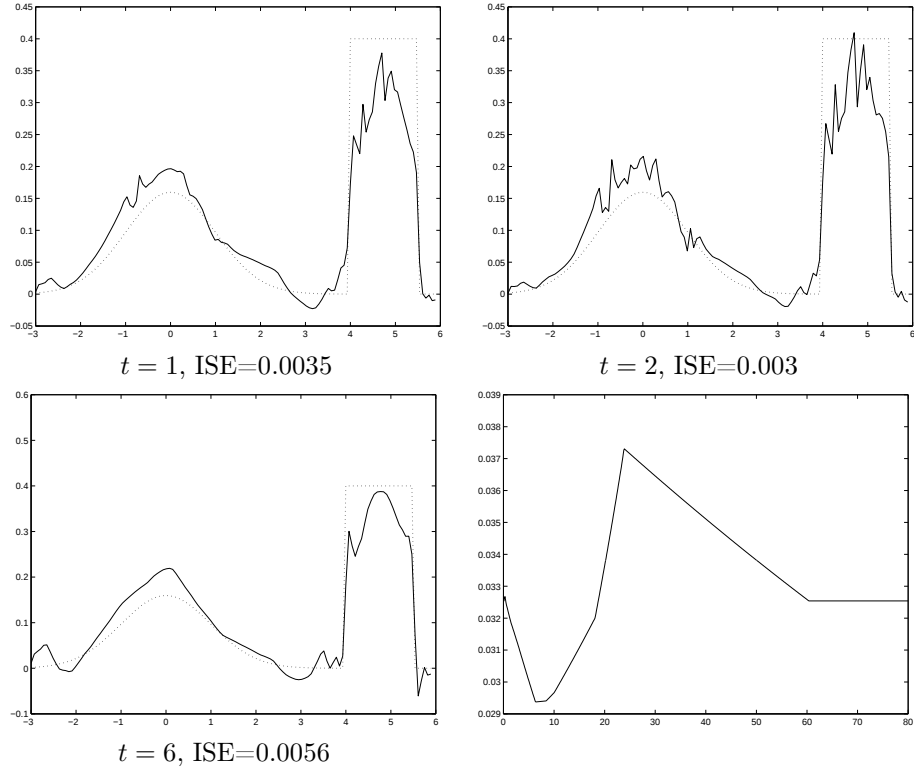
$t = 5$, ISE=0.0025



$t = 7$, ISE=0.0035



Voici les résultats pour le seuillage doux.



3.3.2 Débruitage

On utilise les ondelettes pour estimer une densité mais aussi pour débruiter des données. Le problème est le suivant :

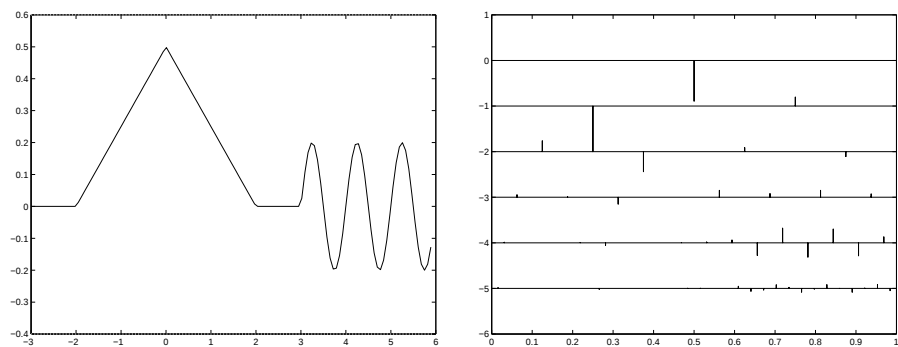
$$Y_i = f\left(\frac{i}{n}\right) + \xi_i, \quad i = 1, \dots, n$$

où les ξ_i sont des variables aléatoires indépendantes centrées. Il s'agit d'estimer f à partir des données $(Y_1, \dots, Y_n)$. L'estimateur linéaire est défini comme précédemment par (3.1) mais avec

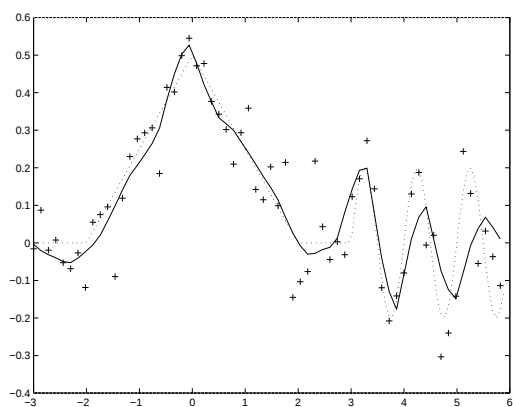
$$\hat{\alpha}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \varphi_{jk}(X_i),$$

$$\hat{\beta}_{jk} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \psi_{jk}(X_i).$$

Voici la fonction f testée et la représentation de ses coefficients.



Avec un bruit gaussien de variance $\frac{1}{10}$, on parvient à faire le débruitage suivant.



Chapitre 4

Bibliographie

1. W.HÄRDLE, G.KERKYACHARIAN, D.PICARD,A.TSYBAKOV (1998) *Wavelets, Approximation and Statisticals Applications* Springer
2. G.KERKYACHARIAN, D.PICARD (2000) *Minimax or maxisets ?*
3. G.KERKYACHARIAN, D.PICARD (2000) *Thresholding algorithms, maxisets and well-concentrated bases*
4. A.COHEN, R.DE VORE,G.KERKYACHARIAN, D.PICARD (2001) *Maximals spaces with given rate of convergence for thresholding algorithms*
5. Y.MEYER (1990) *Ondelettes et opérateurs I* Hermann
6. P.G.LEMARIÉ (1990) *Les ondelettes en 1989* Springer