Corrigé du devoir n$^{\mathrm{o}}$ 6.

Exercice 1. Algorithme de Metropolis.

1. Soit $x, y \in E$ distincts. Quitte à échanger le rôle de x et y, on peut supposer que $\pi(y) \leq \pi(x)$. Sachant que P est symétrique, on a alors
$$\frac{\pi(x)}{\pi(y)} Q(x,y) = \frac{Q(x,y)}{\alpha(x,y)} = P(x,y) = P(y,x) = \alpha(y,x)P(y,x) = Q(y,x),$$
de sorte que $\pi(x)Q(x,y) = \pi(y)Q(y,x)$. On en déduit que la loi π est réversible pour Q et donc invariante.

2. On observe que pour tous $x, y \in E$ distincts, $P(x,y) > 0$ si et seulement si $Q(x,y) > 0$. Une simple récurrence sur $n \geq 1$ permet de montrer que pour tous $x, y \in E$ distincts, $P^n(x,y) > 0$ si et seulement si $Q^n(x,y) > 0$. Ainsi, comme P est irréductible, pour tous $x, y \in E$ distincts, il existe un entier $n \geq 1$ pour lequel on a $P^n(x,y) > 0$. Cela implique que $Q^n(x,y) > 0$ pour ce même entier, si bien que Q est aussi irréductible.

3. (a) Par l'absurde, supposons que pour tout $x_0 \in M$ et tout $y \in E \setminus M$, on a $P(x_0, y) = 0$. On en déduit que M et $E \setminus M$ ne communiquent pas, ce qui contredit l'irréductibilité de P. Ainsi, il existe un état $x_0 \in M$ tel que $P(x_0, y) > 0$ pour un certain $y \in E \setminus M$. On observe que $\pi(x_0) > \pi(y)$, donc
$$Q(x_0, y) = \alpha(x_0, y)P(x_0, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x_0)} P(x_0, y) < P(x_0, y).$$
On a $Q(x_0, z) \leq P(x_0, z)$ pour tout $z \in E \setminus \{x_0\}$, avec une inégalité stricte si $z = y$. D'où
$$\sum_{z \in E \setminus \{x_0\}} Q(x_0, z) < \sum_{z \in E \setminus \{x_0\}} P(x_0, z),$$
ce qui donne $Q(x_0, x_0) > P(x_0, x_0) \geq 0$.

   (b) D'après la question précédente, $Q(x_0, x_0)$ est strictement positif, donc x_0 est de période 1. Comme Q est irréductible, on en déduit que Q est apériodique.

   (c) Q est irréductible et récurrente positive (puisqu'il existe une probabilité invariante). Puisque Q est apériodique, pour tout $x \in E$, $\sum_{y \in E} |\mathbb{P}_x(X_n = y) - \pi(y)|$ converge vers zéro, c'est-à-dire que la loi de X_n converge vers π.

4. Soit $X_1, \ldots, X_n$ simulés par l'algorithme. Montrons que pour tout $x, y \in E$, $\mathbb{P}(X_{i+1} = y | X_i = x) = Q(x,y)$.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{i+1} = y | X_i = x) &= \mathbb{P}(X_{i+1} = y, U \leq \alpha(X_i, V) | X_i = x) + \mathbb{P}(X_{i+1} = y, U > \alpha(X_i, V) | X_i = x) \\
&= \mathbb{P}(V = y, U \leq \alpha(x, V) | X_i = x) + \mathbb{P}(X_i = y, U > \alpha(x, V) | X_i = x) \\
&= \mathbb{P}(V = y, U \leq \alpha(x, y) | X_i = x) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \mathbb{P}(X_i = x, U > \alpha(x, V) | X_i = x) \\
&= \mathbb{P}(V = y | X_i = x) \mathbb{P}(U \leq \alpha(x, y)) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \mathbb{P}(U > \alpha(x, V) | X_i = x)
\end{aligned}$$
car U est indépendante de V et X_i. Ainsi
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{i+1} = y | X_i = x) &= P(x,y)\alpha(x,y) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \sum_{z \in E} \mathbb{P}(V = z, U > \alpha(x,z) | X_i = x) \\
&= P(x,y)\alpha(x,y) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \sum_{z \in E} \mathbb{P}(V = z | X_i = x) \mathbb{P}(U > \alpha(x,z)) \\
&= P(x,y)\alpha(x,y) + \mathbb{1}_{\{x=y\}} \sum_{z \in E} P(x,z)(1 - \alpha(x,z)).
\end{aligned}$$
Si $x \neq y$, cette quantité est égale à $P(x,y)\alpha(x,y) = Q(x,y)$. Si $x = y$, puisque $\alpha(x,x) = 1$, on obtient
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{i+1} = x | X_i = x) &= P(x,x)\alpha(x,x) + \sum_{z \in E} P(x,z)(1 - \alpha(x,z)) = P(x,x) + \sum_{z \neq x} P(x,z)(1 - \alpha(x,z)) \\
&= P(x,x) + \sum_{z \neq x} P(x,z) - \sum_{z \neq x} P(x,z)\alpha(x,z) = 1 - \sum_{z \neq x} Q(x,z) = Q(x,x).
\end{aligned}$$
Ainsi, dans tous les cas $\mathbb{P}(X_{i+1} = y | X_i = x) = Q(x,y)$, donc $X_1, \ldots, X_n$ admet Q pour transition.

Exercice 2. Processus de renouvellement.

1. Le processus N est croissant, càdlàg, issu de zéro et vérifie p.s. $N(t) - N(t-) \in \{0,1\}$ pour tout $t \geq 0$, car les variables X_n sont à valeurs strictement positives. Supposons que N soit un processus de Poisson et posons $m(t) = \mathbb{E}[N(t)]$ pour tout $t \geq 0$. Alors, d'une part, ses accroissements sont stationnaires, ce qui implique que

$$\forall s,t \geq 0 \qquad m(s+t) = \mathbb{E}[N(s+t)] = \mathbb{E}[N(s)] + \mathbb{E}[N(s+t) - N(s)] = \mathbb{E}[N(s)] + \mathbb{E}[N(t)] = m(s) + m(t).$$

En particulier, la fonction m est continue à droite en tout point de $[0,\infty[$ si et seulement si elle l'est en zéro, ce qui est vrai par convergence monotone puisque si on pose $N_p(t) = N(t)\mathbb{1}_{\{T_1 \geq 1/p\}}$ pour tout entier $p \geq 1$, on a simultanément $N_p(t) \uparrow N(t)$ quand $p \to \infty$ et $N_p(t) = 0$ quand t est assez proche de zéro. Enfin, m est croissante. Il existe donc un réel $\lambda \geq 0$ tel que $m(t) = \lambda t$ pour tout $t \geq 0$. D'autre part, comme les variables X_n sont i.i.d., le processus $\widetilde{N} = (\widetilde{N}(t))_{t\geq 0}$ défini par $\widetilde{N}(t) = N(T_1 + t) - 1$ pour tout $t \geq 0$ est indépendant de T_1 et a même loi que N. Ainsi, pour $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[N(t)\,|\,T_1] = \mathbb{E}[N(t)\mathbb{1}_{\{t\geq T_1\}}\,|\,T_1] = \mathbb{1}_{\{t\geq T_1\}}\mathbb{E}[1+\widetilde{N}(t-T_1)\,|\,T_1] = \mathbb{1}_{\{t\geq T_1\}}(1+m(t-T_1)) = \mathbb{1}_{\{t\geq T_1\}}(1+\lambda(t-T_1)),$$

puis, en prenant l'espérance,

$$\forall t \geq 0 \qquad \lambda t = \int_{]0,t]} (1 + \lambda(t-x))\,\nu(\mathrm{d}x),$$

ce qui montre au passage que $\lambda > 0$. Dans le but d'identifier la transformée de Laplace de la mesure ν, multiplions cette identité par $\mathrm{e}^{-\theta t}$, avec $\theta > 0$, puis intégrons sur $[0,\infty[$. On obtient ainsi

$$\int_{0<t<\infty} \lambda t \mathrm{e}^{-\theta t}\,\mathrm{d}t = \int_{0<x\leq t<\infty} (1+\lambda(t-x))\mathrm{e}^{-\theta t}\,\nu(\mathrm{d}x)\mathrm{d}t.$$

En utilisant le théorème de Fubini, un changement de variable élémentaire et la relation $\int_0^\infty (a+bt)\mathrm{e}^{-\theta t}\mathrm{d}t = (a\theta + b)\theta^{-2}$, on en déduit que

$$\forall \theta > 0 \qquad \int_{]0,\infty[} \mathrm{e}^{-\theta x}\,\nu(\mathrm{d}x) = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}.$$

Ainsi, les fonctions de la variable complexe $z \mapsto \int_{]0,\infty[} \mathrm{e}^{zx}\,\nu(\mathrm{d}x)$ et $z \mapsto \lambda/(\lambda - z)$ sont toutes les deux holomorphes sur l'ouvert connexe $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}$ et elles coïncident sur $]-\infty, 0[$, qui est un sous-ensemble de U qui possède un point d'accumulation. D'après le théorème d'unicité du prolongement analytique, on en déduit que ces deux fonctions coïncident sur U tout entier. De plus, elles sont toutes les deux continues sur l'adhérence $\overline{U}$ de U, donc coïncident aussi sur cet ensemble. En particulier, comme $i\mathbb{R} \subset \overline{U}$, on en déduit que la fonction caractéristique de la mesure ν est donnée par

$$\forall u \in \mathbb{R} \qquad \int_{]0,\infty[} \mathrm{e}^{iux}\,\nu(\mathrm{d}x) = \frac{\lambda}{\lambda - iu}.$$

On reconnaît la fonction caractéristique de la loi exponentielle de paramètre λ. On en déduit finalement que N est un processus de Poisson si et seulement si $\nu(\mathrm{d}x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$ pour un certain réel $\lambda > 0$.

2. Comme ν est une mesure de probabilité sur $]0,\infty[$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\nu(]\varepsilon,\infty[) > 0$. Ainsi, $\sum_n \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) = \infty$ et, comme les variables X_n sont indépendantes, le lemme de Borel-Cantelli assure que p.s. $X_n > \varepsilon$ pour une infinité d'entiers $n \geq 1$. Alors, pour tout $t \geq 0$, on a $T_n = X_1 + \ldots + X_n > t$ pour n assez grand. D'où

$$\forall t \geq 0 \qquad 1 = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon \text{ i.s.}) \leq \mathbb{P}(\exists n \geq 1 \mid T_n > t) = \mathbb{P}(N(t) < \infty).$$

Le processus N est donc honnête.

3. Comme les variables X_n sont i.i.d. de loi ν, on a

$$\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1] = \mu = \int_{]0,\infty[} x\,\nu(\mathrm{d}x) \in \,]0,\infty].$$

En effet, si $\mathbb{E}[X_1] < \infty$, ce résultat est une conséquence de la loi forte des grands nombres. Dans le cas contraire, on utilise un résultat du cours selon lequel la convergence précédente est vraie car les variables X_n sont positives. En utilisant le fait que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t tel que $T_n \leq t < T_{n+1}$,

$$\frac{n}{T_{n+1}} \leq \frac{N(t)}{t} \leq \frac{n}{T_n},$$

on en déduit que
$$\frac{N(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{\mu}.$$

4. Pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier $n \geq 0$, on a
$$\mathbb{P}(N(t)=n) = \mathbb{P}(N(t)\geq n) - \mathbb{P}(N(t)\geq n+1) = \mathbb{P}(T_n \leq t) - \mathbb{P}(T_{n+1}\leq t) = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

5. Soit $t \geq 0$. On a tout d'abord
$$m(t) = \mathbb{E}[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \qquad \text{car} \qquad N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$
Ainsi, on peut écrire que
$$m(t) = F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{]0,t]} F_{n-1}(t-x)\,\nu(\mathrm{d}x) = F_1(t) + \int_{]0,t]} \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(t-x)\,\nu(\mathrm{d}x) = F_1(t) + \int_{]0,t]} m(t-x)\,\nu(\mathrm{d}x),$$
ce qui conduit à l'équation de renouvellement. Celle-ci peut également s'obtenir en observant que la démarche entreprise à la question 1 conduit à $\mathbb{E}[N(t)|T_1] = \mathbb{1}_{\{t\geq T_1\}}(1+m(t-T_1))$, puis en prenant l'espérance. Maintenant, le fait que m soit localement bornée vient du fait qu'elle est croissante et finie partout. En effet, rappelons qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\delta = \nu(]\varepsilon,\infty[) > 0$. Alors, en posant $X'_n = \varepsilon \mathbb{1}_{\{X_n > \varepsilon\}}$ et $T'_n = X'_1 + \ldots + X'_n$ pour tout $n \geq 1$, on voit que $T'_n \leq T_n$ et que T'_n/ε suit une loi binomiale de paramètres n et δ. Donc,
$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(2^{-T'_n/\varepsilon} \geq 2^{-t/\varepsilon}) \leq 2^{t/\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[2^{-T'_n/\varepsilon}] = 2^{t/\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} (1-\delta/2)^n < \infty.$$
Enfin, pour montrer que m est la seule solution localement bornée de l'équation de renouvellement, notons $\widetilde{m}$ une autre fonction localement bornée sur $[0,\infty[$ qui vérifie l'équation de renouvellement et posons $\Delta = m - \widetilde{m}$. On a alors
$$\forall t \geq 0 \qquad \Delta(t) = \int_{]0,t]} \Delta(t-x)\,\nu(\mathrm{d}x).$$
En prolongeant que Δ par la fonction nulle sur $]-\infty,0[$, cela revient à
$$\forall n \geq 1 \quad \forall t \geq 0 \qquad \Delta(t) = \mathbb{E}[\Delta(t-X_n)].$$
Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \geq 0$, on déduit de ce qui précède et du fait que T_{n-1} et X_n sont indépendantes,
$$\mathbb{E}[\Delta(t-T_n)\mid T_{n-1}] = \mathbb{E}[\Delta(t-T_{n-1}-X_n)\mid T_{n-1}] = \Delta(t-T_{n-1}),$$
ce qui montre que $\mathbb{E}[\Delta(t-T_n)] = \Delta(t)$ pour tout entier $n \geq 1$. Finalement,
$$|\Delta(t)| = |\mathbb{E}[\Delta(t-T_n)\mathbb{1}_{\{T_n\leq t\}}]| \leq \mathbb{P}(T_n \leq t) \sup_{[0,t]} \Delta \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(N(t)=\infty) \sup_{[0,t]} \Delta = 0,$$
puisque N est honnête. Ainsi, $\Delta = 0$, ce qui prouve l'unicité de m.