Corrigé du devoir n° 5.

Exercice 1.

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe et $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable donc $(M_n^2)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $\mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n] \geq 0$. Cela entraîne que le processus $(\langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est croissant. On peut aussi le voir en calculant

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n &= \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n]\\ &= \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2|\mathcal{F}_n] + 2M_n\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] - 2M_n^2\\ &= \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2|\mathcal{F}_n] \geq 0.\end{aligned}$$

De plus, il est facile de vérifier que le processus $(\langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est prévisible. Enfin, pour tout $n \geq 0$, $M_n^2 - \langle M\rangle_n$ est intégrable et $\mathcal{F}_n$-mesurable et

$$\mathbb{E}[M_{n+1}^2 - \langle M\rangle_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - \langle M\rangle_{n+1} = M_n^2 - \langle M\rangle_n,$$

donc $(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2. Si $(M_n^2 - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale alors pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}(M_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - A_{n+1} = \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - A_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n^2 - A_n$$

c'est-à-dire $A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}(M_{n+1}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n)$. Comme $A_0 = 0$ p.s., on en déduit que $A_n = \langle M\rangle_n$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

3. On va utiliser deux fois la propriété suivante, vue dans la question 1. avec $\langle M\rangle_n$, et qui est très souvent utile : si X est une martingale, pour tout $n \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2 - X_n^2|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2|\mathcal{F}_n]. \tag{1}$$

Pour tout $n \geq 0$ on obtient

$$\begin{aligned}\langle (C\cdot M)\rangle_{n+1} - \langle (C\cdot M)\rangle_n &= \mathbb{E}\left[(C\cdot M)_{n+1}^2 - (C\cdot M)_n^2|\mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\left((C\cdot M)_{n+1} - (C\cdot M)_n\right)^2|\mathcal{F}_n\right]\\ &= \mathbb{E}\left[C_{n+1}^2(M_{n+1} - M_n)^2|\mathcal{F}_n\right] = C_{n+1}^2\mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n]\\ &= C_{n+1}^2\left(\langle M\rangle_{n+1} - \langle M\rangle_n\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\langle (C\cdot M)\rangle_n = \sum_{k=1}^n C_k^2\left(\langle M\rangle_k - \langle M\rangle_{k-1}\right) = (C^2.\langle M\rangle)_n.$$

4. *Méthode 1 :* Le processus $(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et T est un temps d'arrêt donc $(M_{T\wedge n}^2 - \langle M\rangle_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une martingale. De plus, par définition, $\langle M\rangle_{T\wedge 0} = \langle M\rangle_0 = 0$. On vérifie finalement que le processus $(\langle M\rangle_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est prévisible : pour tout $n \geq 1$,

$$\langle M\rangle_{T\wedge n} = \sum_{i=1}^{n-1}\langle M\rangle_i \mathbb{1}_{\{T=i\}} + \langle M\rangle_n\mathbb{1}_{\{T\geq n\}},$$

or pour tout i, $\langle M\rangle_i$ est $\mathcal{F}_{i-1}$-mesurable, $\{T = i\} \in \mathcal{F}_i$ et $\{T \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, donc $\langle M\rangle_{T\wedge n}$ est bien $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Ainsi, d'après la question 2, $\langle M^T\rangle_n = \langle M\rangle_{T\wedge n}$ p.s. pour tout $n \geq 0$.

Méthode 2 : On va utiliser la question 3, l'enjeu est de trouver le bon processus $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $C_n = \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $\{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c$, on obtient que C_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$, et C_n est évidemment borné par 1, donc par la question 3 nous connaissons la forme de $\langle (C\cdot M)\rangle_n$. Or on a

$$\begin{aligned}(C\cdot M)_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{T\geq k\}}(M_k - M_{k-1}) = (M_1 - M_0) + (M_2 - M_1) + \cdots + (M_{T\wedge n} - M_{T\wedge n-1})\\ &= M_{T\wedge n} - M_0 = M_n^T - M_0.\end{aligned}$$

On va noter $Y_n = M_n^T - M_0$. Puisque $(M_n^T)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont des martingales, en utilisant la propriété (1) et le résultat de la question 3, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\langle M^T\rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k^T - M_{k-1}^T)^2|\mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(Y_k - Y_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \langle Y\rangle_n = \langle (C\cdot M)\rangle_n = \sum_{k=1}^n C_k^2(\langle M\rangle_k - \langle M\rangle_{k-1}) = \langle M\rangle_{T\wedge n} - \langle M\rangle_0 = \langle M\rangle_{T\wedge n}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Pour tout $j, k \in F$ et tout $n \geq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{n+1} = k|Y_n = j, Y_{n-1} = l, ...) &= \mathbb{P}(\psi(X_n) = k|\psi(X_n) = j, \psi(X_{n-1}) = l, ...) = \mathbb{P}(X_n = \psi^{-1}(k)|X_n = \psi^{-1}(j)) \\ &= P(\psi^{-1}(j), \psi^{-1}(k)).\end{aligned}$$

Par conséquent, (Y_n) est une chaîne de Markov, de matrice de transition $Q = P(\psi^{-1}(.), \psi^{-1}(.))$. De plus, pour tout $k \in F$, $\mathbb{P}(Y_0 = k) = \mu(\psi^{-1}(k))$, la loi initiale de cette chaîne est donc la mesure image de μ par ψ.

2. L'événement $\{Y_n = 1, Y_{n-1} = 0\}$ est égal à $\{X_n \in \{b, c\}, X_{n-1} = a\}$. Mais $\mathbb{P}(X_n = c, X_{n-1} = a) = 0$. Donc

$$\{Y_n = 1, Y_{n-1} = 0\} = \{X_n = b, X_{n-1} = a\}.$$

En utilisant la propriété de Markov, on obtient

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0|Y_n = 1, Y_{n-1} = 0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = a|X_n = b, X_{n-1} = a) = \mathbb{P}(X_{n+1} = a|X_n = b) = \frac{1}{2}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0|Y_n = 1) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = a|X_n \in \{b, c\}) = \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = a, X_n = b) + \mathbb{P}(X_{n+1} = a, X_n = c)}{\mathbb{P}(X_n = b) + \mathbb{P}(X_n = c)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = a|X_n = b)\mathbb{P}(X_n = b) + \mathbb{P}(X_{n+1} = a|X_n = c)\mathbb{P}(X_n = c)}{\mathbb{P}(X_n = b) + \mathbb{P}(X_n = c)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathbb{P}(X_n = b)}{\mathbb{P}(X_n = b) + \mathbb{P}(X_n = c)}.\end{aligned}$$

puisque $\mathbb{P}(X_{n+1} = a|X_n = c) = 0$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} = a|X_n = b) = 1/2$.
La chaîne (X_n) étant irréductible, il existe n tel que $\mathbb{P}(X_n = c) > 0$ et donc tel que

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0|Y_n = 1, Y_{n-1} = 0) \neq \mathbb{P}(Y_{n+1} = 0|Y_n = 1).$$

Ceci prouve que le processus (Y_n) n'est pas une chaîne de Markov. Ce contre-exemple prouve que la propriété précédente est fausse lorsque ψ n'est pas bijective.