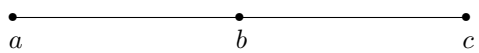
Devoir n° 5. À rendre pour le 09/12/2010.

Exercice 1. Variation quadratique. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ de carré intégrable, c'est-à-dire telle que $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$ pour tout $n \geq 0$.

1. Posons $\langle M\rangle_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$,
$$\langle M\rangle_{n+1} = \langle M\rangle_n + \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2|\mathcal{F}_n].$$
Montrer que le processus $(\langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est croissant et prévisible (i.e. $\langle M\rangle_n$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$, voir feuille de TD 9, exercice 2) et que $(M_n^2 - \langle M\rangle_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ un processus prévisible tel que $A_0 = 0$ presque sûrement. Montrer que, si $(M_n^2 - A_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors $\langle M\rangle_n = A_n$ presque sûrement pour tout $n \geq 0$.
3. Soit $(C_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible borné. On rappelle que le processus $((C \cdot M)_n)_{n\geq 0}$ défini par $(C \cdot M)_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,
$$(C \cdot M)_n = \sum_{k=1}^{n} C_k(M_k - M_{k-1})$$
est une martingale (voir feuille de TD 9, exercice 2). Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer $\langle C \cdot M\rangle_n$ en fonction de $\langle M\rangle$.
4. Soit T un temps d'arrêt. On rappelle que le processus M^T défini par $M_n^T = M_{T\wedge n}$ pour tout $n \geq 0$ est une martingale. Montrer que $\langle M^T\rangle_n = \langle M\rangle_{T\wedge n}$ presque sûrement pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2. Fonctions d'une chaîne de Markov Cet exercice a pour but d'étudier si une fonction d'une chaîne de Markov est encore une chaîne de Markov.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable, de matrice de transtion P et de loi initiale μ. Soit $\psi : E \to F$ une application *bijective*. Montrer que, si $Y_n = \psi(X_n)$, alors $(Y_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur F dont on déterminera la matrice de transition et la loi initiale.
2. On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche aléatoire sur la figure suivante :



Il s'agit de la chaîne qui à chaque transition se déplace d'un sommet à l'un des sommets contigus, choisi au hasard. Soit ψ l'application, à valeurs dans $F = \{0, 1\}$, définie par $\psi(a) = 0, \psi(b) = \psi(c) = 1$. On pose $\psi(X_n) = Y_n$. Montrer que l'on a
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0|Y_n = 1, Y_{n-1} = 0) = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = 0|Y_n = 1) = \frac{1}{2}\frac{\mathbb{P}(X_n = b)}{\mathbb{P}(X_n = b) + \mathbb{P}(X_n = c)}.$$
En déduire que le processus $(Y_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov. Qu'en concluez-vous ?