

Devoir n° 4. À rendre pour le 25/11/2010.

Exercice 1. Théorème de représentation de Skorokhod. Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ qui converge étroitement vers μ . Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ et une variable aléatoire X tels que :

- pour tout $n \geq 1$, la loi de X_n est μ_n ;
- la loi de X est μ ;
- la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge $\mathbb{P}$ -presque sûrement vers X .

Notons $\Omega =]0, 1[$, $\mathcal{F} = \text{Bor}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ la mesure de Lebesgue sur Ω . On note U la fonction identité sur $]0, 1[$. Alors, U est une variable aléatoire uniforme sur $]0, 1[$.

1. Soit ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Notons F_ν sa fonction de répartition, définie par $F_\nu(x) = \nu(]-\infty, x])$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit également $G_\nu :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall u \in]0, 1[\quad G_\nu(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_\nu(x) > u\}.$$

Vérifier que G_ν est bien définie, croissante et continue à droite. Montrer que $Y = G_\nu(U)$ a pour loi ν .

2. Conclure, après avoir montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{\mu_n}(u) = G_\mu(u)$ pour tout point de continuité u de G_μ .

Exercice 2. Un couplage loi géométrique-loi exponentielle. Considérons deux réels strictement positifs a et b , ainsi qu'un vecteur aléatoire (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n \text{ et } Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} e^{-(a+b)y} dy.$$

On rappelle la formule suivante, qui se démontre facilement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!.$$

1. Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X]$ pour toute fonction mesurable $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer $\mathbb{E}[Y/(X+1)]$.
3. Calculer $\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X=n\}}|Y]$, ainsi que $\mathbb{E}[X|Y]$.