Devoir n$^{\text{o}}$ 2. À rendre pour le 14/10/2010.

Exercice 1. Problème du collectionneur de coupons. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(Y_{n,m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées uniformément dans l'ensemble $\{1,\dots,n\}$. Ainsi, pour tout entier $m \geq 1$, on peut dire que la variable $Y_{n,m}$ représente le choix d'un coupon parmi n possibles de façon uniforme et indépendante des choix effectués précédemment. Pour tout entier $k \in \{1,\dots,n\}$, notons alors

$$\tau_{n,k} = \inf\left\{m \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \mathrm{Card}\{Y_{n,1},\dots,Y_{n,m}\} = k\right\}$$

le temps mis pour collecter k coupons différents, et notons aussi $\tau_{n,0} = 0$. On s'intéresse au comportement asymptotique du temps $T_n = \tau_{n,n}$ mis pour obtenir tous les coupons possibles.

1. Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, donner la loi de $X_{n,k} = \tau_{n,k} - \tau_{n,k-1}$. En déduire que, quand $n \to \infty$,
$$\mathbb{E}[T_n] \sim n \ln n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(T_n) = \mathrm{O}(n^2).$$
2. À l'aide de l'inégalité de Chebyshev, montrer que
$$\frac{T_n}{n \ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Exercice 2. À propos du critère de Kolmogorov. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, X_n étant de loi

$$\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)(\delta_1 + \delta_{-1}) + \frac{1}{2^{n+1}}(\delta_{2^n} + \delta_{-2^n}).$$

Soit $Y_n = \mathbb{1}_{\{|X_n|\leq 1\}} X_n$.

1. Calculer la variance de Y_n.
2. Montrer que la suite $n^{-1}\sum_{i=1}^n Y_i$ tend presque sûrement vers 0.
3. Calculer $\mathbb{P}(X_n \neq Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire $\mathbb{P}(\liminf_n \{X_n = Y_n\}) = 1$.
5. En déduire que la suite $n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ tend presque sûrement vers 0.
6. Montrer que $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}\mathbb{E}(X_n^2) = +\infty$.
7. Que peut-on en déduire au sujet du critère de Kolmogorov pour la loi forte des grands nombres ?