Devoir n^o 1. À rendre pour le 30/09/2010.

Exercice 1. Problème des allumettes de Banach. Un fumeur a dans chacune de ses poches une boîte contenant n allumettes. À chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il la prend dans l'une ou l'autre boîte avec probabilité $1/2$. Soit X_n le nombre d'allumettes restant dans une boîte quand le fumeur s'aperçoit *pour la première fois* que l'autre boîte est vide.

1. Donner la loi de X_n.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X_n]$.
3. Donner un équivalent de $\mathbb{E}[X_n]$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 2. Changements de signe d'une marche aléatoire. On considère le jeu de pile ou face équilibré de longueur $2n+1$. On désigne par $X_1, \ldots, X_{2n+1}$ les résultats des lancers et on note $S_m = X_1 + \cdots + X_m$, pour $m \in \{1, \ldots, 2n+1\}$, la marche aléatoire correspondante. On dit qu'un changement de signe arrive au temps m si S_{m-1} et S_{m+1} sont de signe opposé. On note $\mathcal{E}_{n,r}$ l'événement "il y a exactement r changements de signe avant le temps $2n+1$". On veut montrer que la probabilité de $\mathcal{E}_{n,r}$ est égale à $2p_{2n+1,2r+1}$, où

$$p_{m,k} = \mathbb{P}(S_m = k) = 2^{-m} \binom{m}{\frac{k+m}{2}}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{E}_{n,r}) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_{n,r} | S_1 = 1)$. En déduire que l'on peut se ramener à la probabilité de croiser exactement r fois la droite horizontale d'ordonnée -1 avant le temps $2n$.
2. On s'intéresse d'abord au cas où $r = 0$. Soit $k \geq 0$. En utilisant le principe de réflexion, compter le nombre de chemins reliant $(0, 0)$ à $(2n, 2k)$ en touchant la droite horizontale d'ordonnée -2. En déduire que

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 2k \text{ et la marche n'atteint pas le niveau } -2 \text{ avant l'instant } 2n) = p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}.$$

3. En déduire la probabilité que la marche n'atteigne pas le niveau -2. Conclure pour le cas $r = 0$.
4. On s'intéresse maintenant au cas où $r = 1$. Soit $\nu \in \{1, \ldots, n\}$. En utilisant le cas précédent, montrer que le nombre de chemins de longueur $2n - 2\nu$ partant de $(2\nu, -2)$ et ne croisant pas le niveau -1 est égal au nombre de chemins de $(2\nu, -2)$ à $(2n + 1, -3)$.
5. Conclure pour le cas $r = 1$.
6. Conclure dans le cas général à l'aide d'un raisonnement par récurrence.