CORRIGE EXAMEN

Exercice 1.

(1) On calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n = k) &= \binom{n}{k}(\lambda/n)^k(1-\lambda/n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n!}{(n-k)!}(n-\lambda)^{-k}(1-\lambda/n)^n \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n-\lambda)\dots(n-\lambda)}\exp(n\ln(1-\lambda/n)) \to \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)\end{aligned}$$

(2)
```
lambda=5;
nn=[10 50 100 150];
N=10000;

for i=1:4
    n=nn(i);
    x=sum(rand(n,N)<lambda/n);
    m=max(x); c=0:m;
    fth=exp(-lambda)*lambda.^c./factorial(c);
    femp=hist(x,m+1)/N;
    bar(c',[fth',femp']);
end
```

(3) Par la méthode de Monte-Carlo, on estime $I(k) = \mathbb{P}(B_n = k)$ par $\hat{I}_N(k) = N^{-1}\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_n^{(i)}=k}$. On remarque que, pour $n \geq \lambda$,

$$D(n) = \max\left(\max_{0\leq k\leq n}\left|I(k) - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|, \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\lambda}\right)$$

et donc on peut estimer $D(n)$ par

$$\hat{D}_N(n) = \max\left(\max_{0\leq k\leq n}\left|\hat{I}_N(k) - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|, \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}e^{-\lambda}\right)$$

(4) Soit $\Omega(k) = \{|\hat{I}_N(k) - I(k)| \leq \varepsilon\}$. Sur $\cap_{0\leq k\leq n}\Omega(k)$, on a pour tout $0 \leq k \leq n$,

$$\left|\left|I(k) - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right| - \left|\hat{I}_N(k) - \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right|\right| \leq |\hat{I}_N(k) - I(k)| \leq \varepsilon$$

et finalement

$$\hat{D}_N(n) - \varepsilon \leq D(n) \leq \hat{D}_N(n) + \varepsilon.$$

Or, d'après l'inégalité de Hoeffding,

$$\mathbb{P}((\cap_{0\leq k\leq n}\Omega(k))^c) \leq \sum_{0\leq k\leq n}\mathbb{P}(\Omega(k)^c) \leq 2(n+1)\exp\left(-2N\varepsilon^2\right)$$

Si on choisit N tel que $2(n+1)\exp(-2N\varepsilon^2) \leq \alpha$, alors

$$\mathbb{P}(|D(n) - \hat{D}_N(n)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \alpha.$$

On choisit donc $N \geq \ln(2(n+1)/\alpha))/(2\varepsilon^2)$. Par exemple si $\alpha = 0.05$, $\varepsilon = 10^{-2}$, $n = 150$, on prend $N = 43531$.

(5)
```
N=45000;
for n=1:150
    x=sum(rand(n,N)<lambda/n);
    c=0:n;
    fth=exp(-lambda)*lambda.^c./factorial(c);
    femp=hist(x,0:n)/N;
    D(n)=max([abs(fth-femp), exp(-lambda)*lambda.^(n+1)./factorial(n+1) ]);
    borne(n)=2*lambda^2/n;
end

figure()
plot(1:150,D,'b', 1:150,borne,'r')
```

(6)
```
nn=[100, 300];
for i=1:2
    n=nn(i);
    x=sum(rand(n,N)<lambda/n);
    m=max(x); c=0:m;
    fth=exp(-lambda)*lambda.^c./factorial(c);
    femp=hist(x,m+1)/N;
    d=N*sum(((femp-fth).^2)./fth);
    T(i)=d>qchisq(1-0.01,m);
end
T
```

Le test rejette pour $n = 100$ mais accepte pour $n = 300$.

Exercice 2.

(1) En utilisant l'indépendance de Y et de (Z_1, Z_2), on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(Z_1 \leq t, Y = 1) + \mathbb{P}(Z_2 \leq t, Y = 0) = p\mathbb{P}(Z_1 \leq t) + (1-p)\mathbb{P}(Z_2 \leq t) = F(t).$$

(2) On calcule

$$F_{\theta,p}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (p + \frac{1-p}{\theta})x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ p + \frac{1-p}{\theta}x & \text{si } 1 < x \leq \theta \\ 1 & \text{si } \theta < x \end{cases}$$

$$F^{-1}_{\theta,p}(y) = \begin{cases} \frac{\theta y}{\theta p + 1 - p} & \text{si } 0 \leq y \leq p + \frac{1-p}{\theta} \\ \frac{\theta(y-p)}{1-p} & \text{si } p + \frac{1-p}{\theta} < y \leq 1 \end{cases}$$

Ainsi X a même loi que

$$\frac{\theta U}{\theta p + 1 - p}\mathbb{1}_{U \leq p+(1-p)/\theta} + \frac{\theta(U-p)}{1-p}\mathbb{1}_{U > p+(1-p)/\theta}$$

où $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

```
function X=simulinversion(n,theta,p)
U=rand(1,n);
X=theta*U/(theta*p+1-p).*(U<=p+(1-p)/theta)+theta*(U-p)/(1-p).*(U>p+(1-p)/theta);
end
```

(3)
```
function X=simulmelange(n,theta,p)
Z1=rand(1,n);
Z2=rand(1,n)*theta;
Y=(rand(1,n)<p);
X=Z1.*Y+Z2.*(1-Y);
```

```
end
```

(4)
```
n=100;
theta=2; p=0.7;
XX=simulinversion(n,theta,p);
X=simulmelange(n,theta,p);

subplot(2,1,1)
stairs(sort(XX), 1/n:1/n:1); hold on;
plot(0:0.01:1,(p+(1-p)/theta)*(0:0.01:1),'r',...
        1:0.01:theta,p+(1-p)/theta*(1:0.01:theta),'r')
title('methode d inversion')
subplot(2,1,2)
stairs(sort(X), 1/n:1/n:1); hold on;
plot(0:0.01:1,(p+(1-p)/theta)*(0:0.01:1),'r',...
        1:0.01:theta,p+(1-p)/theta*(1:0.01:theta),'r')
```

(5) On remarque déjà que si $\theta = 1$ alors X suit une loi $\mathcal{U}([0,1])$. Il est donc impossible de retrouver p, le modèle n'est pas identifiable (dit autrement : pour tout p, p', $F_{1,p} = F_{1,p'}$). Supposons maintenant qu'on exclut la valeur 1 pour θ : l'ensemble des paramètres est $\Theta = \{(\theta, p), \theta > 1, p \in]0,1[\}$. Soit (θ, p) et (θ', p') deux couples de paramètres tels que $F_{\theta,p} = F_{\theta',p'}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\theta' \leq \theta$. Alors

$$1 = F_{\theta',p'}(\theta') = F_{\theta,p}(\theta') = p + \frac{1-p}{\theta}\theta'$$

ce qui implique $\theta = \theta'$ (car $p \neq 1$). Maintenant

$$p' + \frac{1-p'}{\theta} = F_{\theta,p'}(1) = F_{\theta,p}(1) = p + \frac{1-p}{\theta}$$

ce qui implique $p = p'$, car $\theta \neq 1$. On a donc prouvé que $F_{\theta,p} = F_{\theta',p'} \Rightarrow (\theta, p) = (\theta', p')$: le modèle est identifiable.

(6) La fonction de répartition de $\hat{\theta}$ est $F^n_{\theta,p}$. Si $t > 0$

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta} - \theta| > t) = F^n_{\theta,p}(\theta - t) \to 0$$

donc $\hat{\theta} \to \theta$ en probabilité.

(7) Puisque $f_{\theta,p} = p\mathbb{1}_{[0,1]} + \frac{1-p}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}$, on calcule

$$\mathbb{E}(X) = \int x f_{\theta,p}(x)dx = p\frac{1}{2} + \frac{1-p}{\theta}\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{2}(\theta + p(1-\theta)).$$

On en déduit

$$\hat{p} = \frac{2\bar{X}_n - \hat{\theta}}{1 - \hat{\theta}}.$$

On a alors

$$\hat{p} = \frac{1}{1-\hat{\theta}}\Big(2(\bar{X}_n - \mathbb{E}(X)) + (\theta - \hat{\theta}) + p(1-\theta)\Big) \to p$$

(8)
```
function [thetachapeau,pchapeau]=estimthetap(X)
thetachapeau=max(X);
pchapeau=(2*mean(X)-thetachapeau)./(1-thetachapeau);
end

n=100; theta=2; p=0.7;
X=simulmelange(n,theta,p);
[thetachapeau,pchapeau]=estimthetap(X)
```

(9) Soit $t > 0$. Pour $n > t/(\theta - 1)$,

$$\mathbb{P}(n(\theta - \hat{\theta}) > t) = F^n_{\theta,p}(\theta - t/n) = (1 - \frac{t(1-p)}{\theta n})^n \to \exp(-t(1-p)/\theta)$$

ce qui montre la convergence en loi demandée. On en déduit que $n(\theta - \hat{\theta})(1-p)/\theta$ converge en loi vers une $\mathcal{E}(1)$, et d'après le lemme de Slutski, on a alors que $n(\theta - \hat{\theta})(1-\hat{p})/\hat{\theta}$ converge en loi vers une $\mathcal{E}(1)$. En choisissant $u = \ln(1/\alpha)$, on a alors

$$\mathbb{P}(0 \leq n(\theta - \hat{\theta})(1-\hat{p})/\hat{\theta} \leq u) \to 1 - e^{-u} = 1 - \alpha,$$

ce qui donne l'intervalle de confiance asymptotique :

$$ICA = \left[\hat{\theta}, \hat{\theta} + \frac{\hat{\theta}\ln(1/\alpha)}{n(1-\hat{p})}\right]$$

(10)
```
theta=2; p=0.7;
n=30;N=1000;
alpha=0.05;

for i=1:N
      X=simulmelange(n,theta,p);
      [tc,pc]=estimthetap(X);
      thetachapeau(i)=tc;
      pchapeau(i)=pc;
end

supIC=thetachapeau-thetachapeau*log(alpha)./(1-pchapeau)/n;
niveaureelIC=mean((theta>=thetachapeau) .* (theta <=supIC))
```

(11) Soit $c = (1-\alpha)^{1/n}$. Alors

$$\mathbb{P}_{1,p}(\hat{\theta} > c) = 1 - c^n = \alpha.$$

Le test $\mathbb{1}_{\hat{\theta} > c}$ est donc de niveau $1 - \alpha$. De plus, si $\theta > 1$

$$\mathbb{P}_{\theta,p}(\hat{\theta} > c) = 1 - F_{\theta,p}(c)^n \to 1$$

donc la puissance de ce test tend vers 1.

```
c=(1-alpha)^(1/n);
t=thetachapeau>c;
puissancetest=mean(t)
```

Exercice 3.

(1) Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\|A_l x\| &= \sum_i |(A_l x)_i| = \sum_i |\sum_j a_{ij} x_j| \leq \sum_i \sum_j |a_{ij}||x_j| = \sum_j (\sum_i |a_{ij}|)|x_j| \\ &\leq \max_j (\sum_i |a_{ij}|) \sum_j |x_j| = \max_j (\sum_i |a_{ij}|)\|x\|.\end{aligned}$$

Donc pour tout $x, y \in E$,

$$\|S_l(x) - S_l(y)\| = \|A_l(x-y)\| \leq \max_j (\sum_i |a_{ij}|)\|x - y\|$$

(2)
```
A0=[0.4 -0.3733; 0.06 0.6];
A1=[-0.8 -0.1867;0.1371 0.8];

k0=max(sum(abs(A0)));
k1=max(sum(abs(A1)));
gamma1=0.7007;
lambda=gamma1*k1+(1-gamma1)*k0;
```

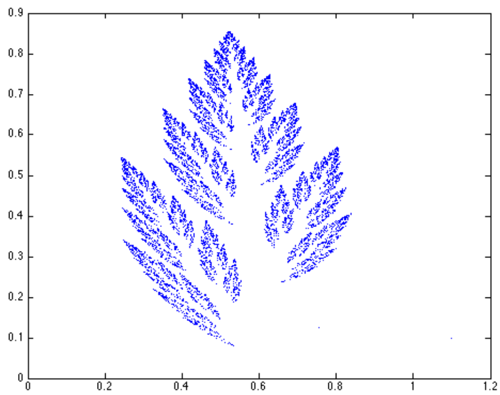
On trouve $k(0) = 0.9733$, $k(1) = 0.9867$ et $\lambda = 0.9827 < 1$.

(3)
```
A=zeros(2,2,2);
A(:,:,1)=A0;A(:,:,2)=A1;

b=zeros(2,2);
b(:,1)=[0.3533 ;0];b(:,2)=[1.1 ; 0.1];

X=zeros(2,10000);
for n=1:9999
    eps=(rand<gamma1);
    X(:,n+1)=A(:,:,eps+1)*X(:,n)+b(:,eps+1);
end
```

(4)
```
plot(X(1,:),X(2,:),'.','MarkerSize',4)
axis([0 1.2 0 0.9])
```



(5) Par indépendance de X_n et ε_{n+1},

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|X_n = x) = \mathbb{E}(f(S_{\varepsilon_{n+1}}(x))) = \sum_{i\in I} \gamma(i) f(S_i(x)).$$

(6) On calcule

$$\begin{aligned} |Kf(x) - Kf(y)| &= |\sum_{i\in I} \gamma(i)[f(S_i(x)) - f(S_i(y))]| \leq \sum_{i\in I} \gamma(i)|f(S_i(x)) - f(S_i(y))| \\ &\leq \sum_{i\in I} \gamma(i)\|S_i(x) - S_i(y)\| \leq \sum_{i\in I} \gamma(i)k(i)\|x-y\| \leq \lambda\|x-y\|. \end{aligned}$$

Soit f 1-Lipschitz bornée. Le calcul précédent montre que $\frac{1}{\lambda}Kf$ est 1-Lipschitz. De plus, pour tout x dans E,

$$\left|\frac{1}{\lambda}Kf(x)\right| \leq \frac{1}{\lambda}\sum_{i\in I} \gamma(i)|f(S_i(x))| \leq \frac{1}{\lambda}\sum_{i\in I} \gamma(i)\|f\|_\infty \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_\infty$$

donc cette fonction est bornée.

(7) Notons $\mu_n = \mu K^n$. On va prouver l'égalité par récurrence sur n. Le résultat est vrai de façon évidente pour $n = 1$. Maitenant, supposons qu'à l'étape n, on ait pour toute fonction g, $\int g d\mu_n = \int K^n g d\mu$. Alors, puisque $\mu_{n+1} = \mu_n K$,

$$\int f d\mu_{n+1} = \int f d(\mu_n K) = \int K f d\mu_n = \int K^n (Kf) d\mu = \int K^{n+1} f d\mu.$$

(8) Soit f 1-Lipschitz bornée. Alors, puisque $\frac{1}{\lambda} K f$ est 1-Lipschitz bornée,

$$\rho(\mu, \nu) \geq |\int \frac{1}{\lambda} K f d\mu - \int \frac{1}{\lambda} K f d\nu| \geq \frac{1}{\lambda} |\int f d(\mu K) - \int f d(\nu K)|.$$

On en déduit $\rho(\mu, \nu) \geq \frac{1}{\lambda} \rho(\mu K, \nu K)$.

(9) Si ν est invariante, alors $\rho(\mu K^n, \nu) = \rho(\mu K^n, \nu K^n) \leq \lambda^n \rho(\mu, \nu) \to 0$

car $\lambda < 1$. Donc, pour toute fonction f 1-Lipschitz bornée

$$\mathbb{E}_\mu(f(X_n)) = \int K^n f d\mu = f d(\mu K^n) \to \int f d\nu.$$