Feuille de TD n° 9 : Martingales : Définitions et arrêt. Théorèmes de convergence pour les martingales.

Exercice 1. Une fonction continue $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est dite harmonique si pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $r > 0$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) \mathrm{d}\theta.$$

Soit $r > 0$ et $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$. Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = U_1 + \cdots + U_n$. Montrer que, si f est harmonique, $(f(X_n))_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, \ldots, U_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2. Deux transformations de martingales. On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe, et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ (i.e. X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout n), tel que $\mathbb{E}[\phi(X_n)] < \infty$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors $(\phi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale et si ϕ est croissante, alors $(\phi(X_n))_{n\geq 0}$ est une sous-martingale.
2. On dit qu'un processus $(H_n)_{n\geq 1}$ est prévisible si H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus adapté et $(H_n)_{n\geq 1}$ un processus prévisible et borné. On pose $(H \cdot X)_0 = 0$ et

$$\forall n \geq 1 \qquad (H \cdot X)_n = H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) + \ldots + H_n(X_n - X_{n-1}).$$

   Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, alors $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$ est aussi une martingale. Montrer que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale (respectivement sous-martingale), et si $H_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale (respectivement sous-martingale).

Exercice 3. Loi du logarithme itéré. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On définit $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que presque sûrement on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{(2n \log \log n)^{\frac{1}{2}}} \leq 1.$$

On pose $h(x) = (2x \log \log x)^{\frac{1}{2}}$ pour $x \geq \mathrm{e}$.

1. Pour tous $\theta > 0$ et $c > 0$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq \mathrm{e}^{-\theta c}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta S_n}\right] \qquad \text{puis que} \qquad \mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} S_k \geq c\right) \leq \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2n}}.$$

2. Soit $K > 1$. Majorer la quantité

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq K^n} S_k \geq Kh(K^{n-1})\right)$$

   et montrer que $\limsup_{n\to\infty} S_n/h(n) \leq K$ presque sûrement. Conclure.

Exercice 4. Inégalité maximale pour les sur-martingales positives. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sur-martingale positive sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que si T est un temps d'arrêt, alors $(X_{T\wedge n})_{n\geq 0}$ est une sur-martingale. (*Indication :* poser $H_n = \mathbb{1}_{\{T\geq n\}}$ et étudier le processus $((H \cdot X)_n)_{n\geq 0}$.)
2. Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq 0} X_n > a\right) \leq \frac{\mathbb{E}[X_0]}{a}.$$

Exercice 5. Théorème de Rademacher. L'objectif de cet exercice est de montrer par une approche probabiliste que toute fonction lipschitzienne est primitive d'une fonction mesurable bornée. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \lfloor 2^n X \rfloor 2^{-n} \qquad \text{et} \qquad Z_n = 2^n \left(f\left(X_n + 2^{-n}\right) - f(X_n)\right).$$

1. Montrer les égalités de tribus suivantes :

$$\sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n) \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale bornée (où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$ pour tout $n \geq 0$).
3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite presque sûre et dans L^1 de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée telle que $Z = g(X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire que

$$\text{p.s.} \qquad Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n + 2^{-n}} g(u)\mathrm{d}u.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)\mathrm{d}u.$$

Exercice 6. L'urne de Polya. À l'instant 1, une urne contient a boules blanches et $b = N_0 - a$ boules rouges. On tire une boule et on la remplace par deux boules de la même couleur, ce qui donne la composition de l'urne à l'instant 2. On répète ce procédé. Pour $n \geq 1$, on note Y_n et $X_n = Y_n/(N_0 + n - 1)$ respectivement le nombre et la proportion de boules blanches dans l'urne à l'instant n. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n + 1|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_{n+1} = Y_n|\mathcal{F}_n)$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une variable aléatoire, que l'on note U, et montrer que pour tout $k \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n^k] = \mathbb{E}[U^k]$.
2. *Cas $a = b = 1$.* Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, Y_n suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. En déduire la loi de U.
3. *Cas général.* On fixe $k \geq 1$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$Z_n = \frac{Y_n(Y_n + 1) \ldots (Y_n + k - 1)}{(n + N_0 - 1)(n + N_0) \ldots (n + N_0 + k - 2)}.$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[U^k]$.

4. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle bornée se développe en série entière sur $\mathbb{R}$ (on exhibera le développement en série entière). En déduire qu'on a caractérisé la loi de U. *Remarque :* La loi de U est la loi $\beta(a, b)$, de densité $B(a, b)^{-1} u^{a-1}(1 - u)^{b-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(u)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 7. Quelques exemples.

1. *Un exemple de martingale qui converge presque sûrement mais n'est pas bornée dans L^1.* On considère une famille $(Y_n, \varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout n, la loi de Y_n est

$$\frac{1}{2}\left(\delta_{a_n} + \delta_{-a_n}\right),$$

où $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels positifs fixée, et la loi de ε_n est

$$\frac{1}{n^2}\delta_1 + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\delta_0.$$

On définit, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \varepsilon_1, \ldots, Y_n, \varepsilon_n)$ et $M_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k Y_k$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ et qu'elle converge presque sûrement. Montrer qu'on peut choisir $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que cette martingale ne soit pas bornée dans L^1.

2. *Un exemple de martingale qui tend presque sûrement vers $+\infty$.* On considère $(\xi_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(\xi_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\left(\xi_n = \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On pose $M_n = \xi_2 + \ldots + \xi_n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $(M_n)_{n\geq 2}$ est une martingale telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} +\infty$.