Feuille de TD n° 7 : Convergence en loi et compacité. Le théorème limite central vectoriel.

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

1. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X. Montrer que $\mathbb{P}(X\in\mathbb{Z})=1$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi si et seulement si il existe une suite $(p_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ dans $[0,1]$ dont la somme des termes vaut un telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=j)=p_j$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $\mathbb{P}(X_n=n)=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi.

Exercice 2. Extrait du partiel 2007. Soit $U_n=(X_n,Y_n)$, $n\geq 1$, des vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^2$ tels que les suites $(X_n)_{n\geq1}$ et $(Y_n)_{n\geq1}$ convergent en loi. Notons $\mathbb{P}_{U_n}$ (resp. $\mathbb{P}_{X_n}$, $\mathbb{P}_{Y_n}$) la loi de U_n (resp. X_n, Y_n).

1. Montrer que la suite $(\mathbb{P}_{U_n})_{n\geq1}$ est tendue. (Indication : considérer d'abord $(\mathbb{P}_{X_n})_{n\geq1}$ et $(\mathbb{P}_{Y_n})_{n\geq1}$.)
2. On suppose désormais que les fonctions caractéristiques de U_n convergent simplement dans $\mathbb{R}^2$ pour $n\to\infty$. Montrer que $(U_n)_{n\geq1}$ converge en loi.

Exercice 3. Soit g une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que $|g(x)|\to\infty$ quand $|x|\to\infty$. Soit $\mathcal{P}$ une famille de mesures de probabilités vérifiant $\sup\limits_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}}\int_{\mathbb{R}}|g|d\mathbb{P}<\infty$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est tendue, et donc relativement compacte pour la convergence étroite.
2. On suppose g continue. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{P}$ qui converge vers μ. Prouver que $\int_{\mathbb{R}}|g|d\mu<\infty$.
3. Soit f une fonction continue telle que $f=\mathrm{o}(g)$ à l'infini. Montrer que $\int_{\mathbb{R}}fd\mathbb{P}_n$ tend vers $\int_{\mathbb{R}}fd\mu$.

Exercice 4. Soit $m\in\mathbb{R}^d$ et Σ une matrice carrée de taille d et de rang p. Soit X un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m,\Sigma)$. Montrer qu'il existe une matrice A de taille $d\times p$ et de rang p telle que $AY+m$ ait même loi que X, où Y est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0,I_p)$. Calculer la densité de X lorsqu'elle existe.

Exercice 5. Soit X un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma=\begin{pmatrix}3&-1&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Trouver un endomorphisme U de $\mathbb{R}^3$ tel que les composantes de $Y=UX$ soient indépendantes. Donner la loi de Y.

Exercice 6. Extrait du partiel 2007. Soit X et Y deux vecteurs gaussiens indépendants centrés et de même loi dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que $Z=X-Y$ et $Z'=X+Y$ sont gaussiens, indépendants et de même loi.

Exercice 7. Pour cet exercice, il est commode d'identifier $\mathbb{R}^k$ aux matrices-colonnes de taille k. Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi portée par $\{1,2,\dots,k\}$. Notons $N_{n,i}=\sum_{j=1}^n\mathbb{1}_{\{X_j=i\}}$ et $p_i=\mathbb{P}(X_1=i)$ pour tout $i\in\{1,2,\dots,k\}$, puis $N_n=(N_{n,1},\dots,N_{n,k})$.

1. Donner la loi de N_n.
2. On note $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ la convergence en loi. Montrer que
$$\begin{pmatrix}\frac{N_{n,1}-np_1}{\sqrt{np_1}}\\ \vdots\\ \frac{N_{n,k}-np_k}{\sqrt{np_k}}\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\mathrm{I}_k-X^tX),$$
où I_k est la matrice identité de taille k et X est un vecteur-colonne que l'on déterminera. Montrer que $\Gamma=\mathrm{I}_k-X^tX$ est la matrice d'un projecteur orthogonal, dont on précisera l'image et le noyau.
3. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q de taille k telle que $QX=e$, avec $e={}^t(0,\dots,0,1)$, puis que
$$Q\begin{pmatrix}\frac{N_{n,1}-np_1}{\sqrt{np_1}}\\ \vdots\\ \frac{N_{n,k}-np_k}{\sqrt{np_k}}\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,\mathrm{I}_k-e^te).$$

4. On considère

$$T_n = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_{n,i} - np_i)^2}{np_i}.$$

Montrer que T_n converge en loi vers $\chi^2(k-1)$. Indication : On pourra s'intéresser au carré de la norme euclidienne du vecteur

$$Q \begin{pmatrix} \frac{N_{n,1}-np_1}{\sqrt{np_1}} \\ \vdots \\ \frac{N_{n,k}-np_k}{\sqrt{np_k}} \end{pmatrix}.$$

Ce résultat est très utilisé en statistiques : il permet d'établir le *test du* χ^2 qui est mis en oeuvre pour savoir si un échantillon i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$ suit une loi donnée à l'avance. Son usage est très répandu en biologie.

Exercice 8. Un vecteur $m \in \mathbb{R}^d$ et une matrice carrée Γ de taille d étant donnés, notons $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\sqrt{n}(X_n - m)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \Gamma)$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ dérivable au point m, $\sqrt{n}(f(X_n) - f(m))$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, J_f(m)\Gamma^t J_f(m))$ où $J_f(m)$ est la matrice jacobienne de f au point m.