# Feuille de TD n° 4 : Loi du tout ou rien. Lois des grands nombres

**Exercice 1.**

1. Soit $B$ et $C$ deux ensembles. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_{2n} = B$ et $A_{2n+1} = C$. Déterminer limsup $A_n$ et liminf $A_n$.
2. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties d'un ensemble $\Omega$. Montrer que $\mathbb{1}_{\text{limsup } A_n} = \text{limsup } \mathbb{1}_{A_n}$.

**Exercice 2.** Soit $X_i$, une suite de variables aléatoires indépendantes. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que les événements suivants ont pour probabilité 0 ou 1 :

$$\{\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty\} \qquad \{\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\}.$$

**Exercice 3. Événements échangeables et loi du 0-1 de Hewitt-Savage.** Notons $S$ l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}^*$ de support fini, c'est-à-dire les bijections $\sigma$ de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\sigma(n) = n$ pour tout $n$ suffisamment grand. À une telle permutation $\sigma \in S$, on peut naturellement associer l'application $f_\sigma : \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $f_\sigma((x_n)_{n\geq 1}) = (x_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$.

Considérons maintenant une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles. On rappelle que tout événement $A$ qui appartient à la tribu engendrée par ces variables peut s'écrire sous la forme $A = \{(X_n)_{n\geq 1} \in B\}$, où $B$ appartient à la tribu produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ (engendrée par les cylindres). On dit qu'un tel événement $A$ est échangeable si pour toute permutation $\sigma \in S$, on a $f_\sigma^{-1}(B) = B$, c'est-à-dire que pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de réels,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in B \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots) \in B.$$

1. Montrer que tout événement appartenant à la tribu asymptotique est échangeable.
2. Montrer qu'un événement peut être échangeable sans nécessairement être asymptotique.
3. On suppose que les variables $X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées. Montrer que tout événement échangeable $A$ vérifie $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. C'est la loi du 0-1 de Hewitt-Savage.
4. En déduire que la loi du 0-1 de Hewitt-Savage généralise celle de Kolmogorov.

**Exercice 4.** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = 1/2$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Soit

$$A = \{\limsup S_n = +\infty\} \qquad \text{et} \qquad B = \{\liminf S_n = -\infty\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.
2. Montrer que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.
3. Supposons que $\mathbb{P}(A) = 0$.
   (a) Montrer que la suite $(S_n)_n$ est bornée p.s.
   (b) Montrer que $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}[\sup_n |S_n| < k] = 1$.
   (c) Calculer la loi de $S_n$.
   (d) Montrer qu'il existe une constante $C$ telle que pour tout $n$ et tout $k$,
   $$\mathbb{P}[|S_n| < k] \leq \frac{Ck}{\sqrt{n}}.$$
   (e) En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.
4. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0$ infiniment souvent$)$.

**Exercice 5.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi la loi de $X$.

1. Soit $a > 0$. Montrer que $X$ est intégrable ssi $\sum_{n>0} \mathbb{P}(|X| \geq an) < \infty$.
2. Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, alors $(X_n/n)$ converge p.s. vers 0.

3. Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) = \infty$, alors, pour tout $a$ positif, $\mathbb{P}(\limsup\{|X_n| \geq an\}) = 1$.
4. Soit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Déduire de la question précédente que si $\mathbb{E}(|X|) = \infty$, alors $\limsup_n |S_n/n| = +\infty$ p.s.

**Exercice 6.** Soit $(T_k)_{k\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $k \geq 2$, $T_k$ suit la loi exponentielle de paramètre $\ln(k)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(T_k \geq 1)$, ainsi que $\mathbb{P}(T_k \geq 1 + \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2. En déduire, à l'aide du lemme de Borel-Cantelli, que

$$\text{p.s.} \qquad \limsup_{k\to\infty} T_k = 1.$$

**Exercice 7.** Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de v.a. indépendantes de loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Montrer que $\sqrt{2\pi}\mathbb{P}(X_0 > a) \sim a^{-1}\exp(-a^2/2)$ quand $a \to +\infty$.
2. Donner la loi de $S_n/\sqrt{n}$.
3. En déduire que si $(a_n)$ est une suite de réels positifs telle que $a_n/\sqrt{n}$ tende vers $+\infty$ alors $S_n/a_n$ converge vers 0 en probabilité. Peut-on conclure pour la convergence p.s. ? Montrer cependant que si $a_n = \sqrt{n}\log n$, alors $S_n/a_n$ converge p.s. vers 0.
4. Montrer que $\limsup_n (2\log n)^{-1/2} X_n = 1$ p.s. et $\limsup_n (2\log n)^{-1/2}|X_n| = 1$ p.s.