Feuille de TD 3

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli, dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{2} - a$	$a + \frac{1}{3}$
1	b	$\frac{1}{6} - 2a$

1) Quelles valeurs sont autorisées pour a et b ?
2) Calculer en fonction de a et b les lois marginales de X et de Y.
3) Quelles valeurs de a et b correspondent à un couple (X, Y) de variables indépendantes ?

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à densité, avec

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} C\, y\, e^{-x} & \text{si } 0 \le y \le x, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Trouver la valeur de la constante C.
2) Calculer les densités marginales de X et de Y.
3) Calculer la covariance de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

La probabilité pour qu'une particule émise par une source radioactive traverse une paroi de protection est 0.01. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de particules traversant la paroi.

1) On suppose que n particules ont été émises
   a) Préciser la loi de probabilité de X.
   b) Si $n = 10$ quelle est la probabilité pour qu'une particule et une seule traverse la paroi ?
   c) Calculer le nombre moyen de particules traversant la paroi.
2) On admet que le nombre de particules émises est une variable aléatoire N obéissant à une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.
   a) Exprimer la loi de probabilité conjointe du couple (X, N).
   b) Exprimer la loi marginale de X.
   c) Exprimer la probabilité pour qu'une particule et une seule traverse la paroi. Faire le calcul pour $\lambda = 10$.

d) Calculer le nombre moyen de particules traversant la paroi.

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $Z_1 = X + Y$ et $Z_2 = |X - Y|$.

1) Donner la loi du couple (Z_1, Z_2), puis les lois marginales.

2) Montrer que Z_1 et Z_2 sont décorrelées (c'est-à-dire de covariance nulle). Sont-elles indépendantes ?

Exercice 5

Calculer $\mathbb{E}[X^2(3Y^2+1)]$ lorsque (X,Y) a pour densité jointe $\frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Exercice 6

Soient X et Y deux variables continues indépendantes, à valeurs positives. Calculer la fonction de répartition du produit XY et sa densité.

Exercice 7

Anna et Bastien ont rendez-vous chez Charlotte entre 12h et 14h. Par hypothèse les instants d'arrivée de Anna et Bastien sont des variables aléatoires X et Y indépendantes, de distribution uniforme sur $[0,2]$, l'instant 0 correspondant à midi, l'unité de temps étant l'heure.

1) Soit V le temps d'attente de Charlotte jusqu'à ce que les deux amis soient arrivés. Exprimer U en fonction de X et Y.

2) Donner un lien entre les fonctions de répartition F_V, F_X et F_Y. Déterminer la densité de V.

3) Soit U le temps d'attente de Charlotte avant la première arrivée. Déterminer la densité de U.

4) Soit W le temps d'attente de Charlotte entre les deux arrivées. Déterminer la densité de W.

Exercice 8

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes avec

$$X \sim \mathcal{E}(1/2) \qquad \text{et} \qquad Y \sim \mathcal{U}([0,2\pi]).$$

1) Quelle est la densité du couple (X,Y) ?

2) On pose $(U,V) = (\sqrt{X}\cos Y, \sqrt{X}\sin Y)$. Soit g une fonction continue. Montrer que

$$\mathbb{E}[g(U,V)] = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} g(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2} r\,dr\,d\theta.$$

3) Faire un changement de variables polaire-cartésien, et en déduire la loi de (U,V).

Exercice 9

1) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-l)\mathbb{P}(Y=l).$$

2) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Qu'en est-il pour un nombre n arbitraire de variables aléatoires de Poisson ?

Exercice 10

Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Pour $l \in \mathbb{Z}$, la *loi conditionnelle* de X sachant $Y = l$ est la mesure de probabilité $\mathbb{P}_{X|Y=l} : \mathbb{Z} \to [0,1]$, dont les valeurs sont données par

$$\mathbb{P}_{X|Y=l}[k] = \mathbb{P}[X=k|Y=l] = \frac{\mathbb{P}[X=k \text{ et } Y=l]}{\mathbb{P}[Y=l]}.$$

1) Expliciter $\mathbb{P}_{X|Y=l}$ dans le cas où X et Y sont indépendantes.
2) Soit W et X deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres w et x. On pose $Y = W + X$, et on rappelle que Y suit une loi de Poisson de paramètre $w + x$. Calculer la loi conditionnelle $\mathbb{P}_{X|Y=l}$, pour tout $l \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11

Soit $A = D_{(0,R)}$ le disque de centre l'origine et de rayon R dans $\mathbb{R}^2$, et (X, Y) un couple de variables à densité suivant la loi gaussienne bivariée standard. Calculer $\mathbb{P}[(X,Y) \in A]$. Donner la densité de la variable aléatoire continue $\sqrt{X^2+Y^2} = Z$.

Exercice 12

Soit X un vecteur gaussien de moyenne $m = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de matrice de variance $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Quelle est la loi de X_1 ? de X_2 ? Ces deux variables sont-elles indépendantes ?
2) Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
3) Soit $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{8} & -1/\sqrt{8} \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Quelle est la loi de Y ? Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?