Feuille de TD 2

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2\}$, dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	-1	0	1	2
$\mathbb{P}[X = k]$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{1}{3}$

1) Calculer a.
2) Tracer la fonction de répartition de X.
3) Donner la loi de $|X|$.
4) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Soit X le nombre de tremblements de terre majeurs (dont la magnitude est supérieure à 6 sur l'échelle de Richter) se produisant le long d'une faille donnée au cours d'un siècle, avec

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 3^x e^{-3}/x! & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

1) Représenter la loi de probabilité de X par un diagramme en bâtons.
2) Quel est le nombre maximum de tremblements de terre ?
3) Donner la probabilité d'observer au plus 1 tremblement de terre.
4) Donner le nombre moyen de tremblements de terre en un siècle.

Exercice 3

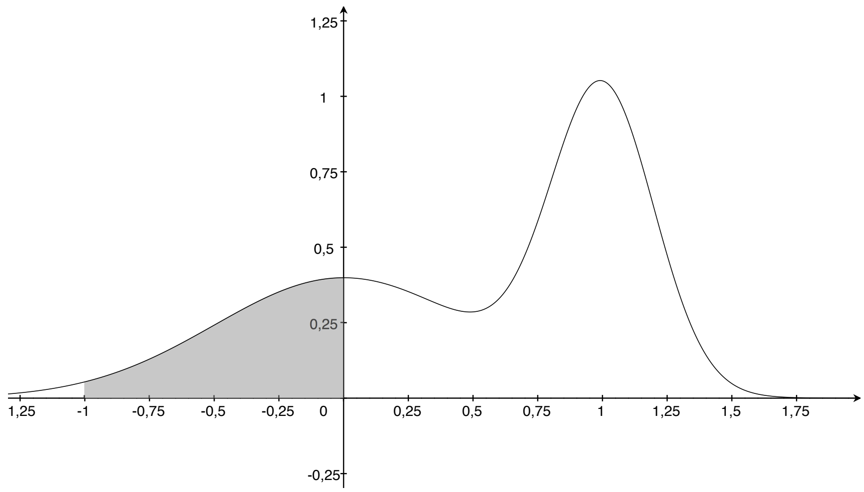
Pour des ampoules électriques d'une marque donnée, on a pu déterminer que leur durée de vie X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/320$ jours^{-1}, c'est-à-dire que sa densité est

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

1) Représenter la densité de X.
2) Donner sa fonction de répartition.
3) Calculer la probabilité qu'une ampoule reste en fonction durant plus d'une année.
4) Calculer le temps x tel que la probabilité que la durée de vie excède ce temps soit égale à $1/2$.

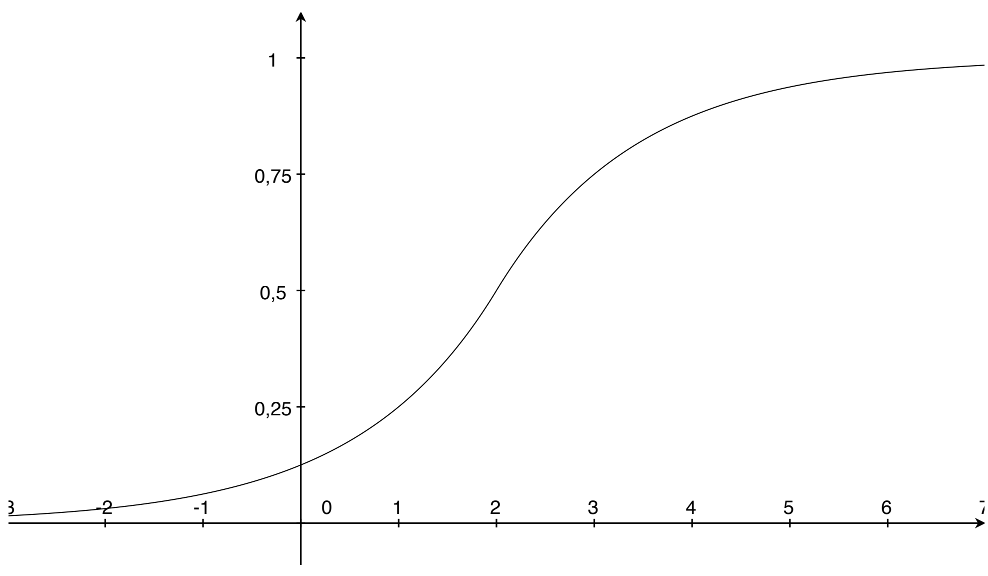
Exercice 4

La figure suivante représente la densité f d'une variable X. Quelles sont les valeurs les plus probables ? Que peut valoir l'espérance de X ? L'aire grisée vaut 0.24 : quel événement a cette probabilité ?



Exercice 5

La figure suivante représente la fonction de répartition d'une variable X. Donner $P(X \leq 1)$, $P(2 < X \leq 3)$, la médiane et le quantile d'ordre 0,875.



Exercice 6

Le coût d'un accident automobile peut être décrit par une variable aléatoire. Il est constitué de frais fixes (constitution du dossier, etc...) s'élevant à 200€ et d'un montant aléatoire que l'on suppose obéir à une loi de densité

$$f(x) = Cxe^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \qquad \lambda > 0$$

1) Exprimer la fonction de répartition $F(x)$.
2) Exprimer la constante C en fonction de λ.
3) Tracer f et F et vérifier que F a bien les propriétés d'une fonction de répartition.
4) Sachant que $\lambda^{-1} = 1400$€, calculer la probabilité pour qu'un accident coûte moins de 900€ ; entre 1600€ et 4400€ ; plus de 4400€.
5) Quel est le coût moyen d'un accident ?

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire. Montrer que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\operatorname{var}(X)}{t^2}.$$

Commenter. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}[|X - np| \geq n\varepsilon] \to_{n\to\infty} 0.$$

Exercice 8

Le quotient intellectuel, ou QI, est le résultat d'un test psychométrique qui entend fournir une indication quantitative standardisée de l'intelligence humaine. Le « QI standard » correspond au rang auquel se situe une personne relativement à une population représentée par une loi normale. Les tests sont « étalonnés » lors de leur conception pour que les résultats suivent une courbe de Gauss. L'étalonnage fixe par construction la moyenne (ou l'espérance) et l'écart type. La moyenne du QI standard est fixée à 100 pour des raisons arbitraires et historiques. L'écart-type est le plus souvent fixé à 15. (source : Wikipedia)

1) Quelle est la loi de probabilité du QI ? L'exprimer en fonction de la loi normale standard.
2) Si on considère qu'un enfant est intellectuellement précoce si son QI est supérieur à 125, quelle est la fréquence théorique des enfants précoces dans la population ?
   Donnée : si F est la fonction de répartition de la loi normale standard, $F(5/3) = 0.952$
3) *Mensa* est une association internationale dont le critère d'admission est d'avoir un QI se situant dans les 2 % les plus élevés de la population. Quelle est la valeur de QI standard nécessaire pour y être admis ?
   Donnée : le quantile d'ordre 0.98 de la loi normale standard est $F^{-1}(0.98) = 2.05$.
4) Faites un dessin approximatif de la densité de la loi $\mathcal{N}(100, 15^2)$. Représenter graphiquement les résultats des questions précédentes.

Exercice 9

L'énergie cinétique y (en kiloJoules) d'un objet en mouvement est fonction de sa masse m (en kilogrammes) et de sa vitesse x (en mètres par seconde) selon la relation $y = \frac{1}{2}mx^2$; elle est liée aux dégâts qu'occasionnerait un tel objet s'il rentrait en collision avec un obstacle fixe. Quelle est l'énergie cinétique moyenne que possède un camion de masse m roulant sur une autoroute, en admettant que sa vitesse suive une loi normale $\mathcal{N}(28, 4)$ (soit environ 100 km/h en moyene avec un écart-type d'environ 7 km/h) ?

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1) Calculer, pour tout $t > 0$, la probabilité $\mathbb{P}(X > t)$.
2) Soient $x, y > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(X > x + y | X > x) = \mathbb{P}(X > y)$. Commenter.
3) Calculer pour tout entier $k \geq 1$, la probabilité pour que X soit compris entre $k - 1$ et k.
4) En déduire que $\lceil X \rceil$, l'entier approchant X par valeurs supérieures, suit une loi géométrique de paramètre à préciser.

Exercice 11

On admet que le rayon d'une bille de roulement est une variable aléatoire R qui obéit à une loi uniforme $\mathcal{U}([r_0 - a, r_0 + a])$ avec $a < r_0$. On s'intéresse au volume V d'une bille.

1) Exprimer la fonction de répartition de R.
2) Calculer la fonction de répartition de V.
3) En déduire la densité de V.
4) Calculer $\mathbb{E}(V)$.

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire à densité, dont la fonction de répartition est :

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t^3 & \text{si } t \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

1) Calculer la densité de X.
2) Calculer l'espérance et la variance de X.
3) Soit $Y = \ln(X)$. Donner la fonction de répartition, puis la densité de Y.

Exercice 13

1) Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité $f_X(x)$. Donner une formule pour la fonction de répartition, puis pour la densité de X^2. En déduire la densité de X^2 si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (cette loi est appelée loi du chi-deux $\chi^2(1)$).
2) Donner une formule pour la fonction de répartition, puis pour la densité de $1/X$. Que se passe-t-il si X suit une loi de Cauchy ?

Exercice 14

L'avion qui réalise la liaison Paris-Djakarta possède 400 places. La compagnie a vendu les 400 places disponibles sur ce vol. Chaque passager a une probabilité 0,02 de ne pas se présenter à l'embarquement et les comportements de chacun des passagers ne s'influencent pas mutuellement. On note X le nombre de passagers absents à l'embarquement au moment du départ.

1) (a) Quelle est la loi de X ?

   (b) Quelle est la probabilité que l'avion soit plein ?

   (c) Quel est le nombre moyen de passagers présents à l'embarquement ? quel en est l'écart-type ?

2) (a) Comment peut-on approcher la loi de X ? On appelle $\mathcal{L}$ cette loi de probabilité.

   (b) Calculer l'espérance et la variance de la loi $\mathcal{L}$. Comparer avec l'espérance et la variance de la loi de X.

3) La compagnie décide de vendre davantage de places que le nombre réel de places disponibles, elle vend en fait 402 places. Notons Y le nombre de passagers présents à l'embarquement. Le coût d'un billet est de 1000 euros. Lorsqu'un client qui s'est présenté à l'embarquement ne peut embarquer, la compagnie le dédommage en lui versant 50000 euros.

   (a) Calculez la probabilité pour que certains passagers présents à l'embarquement ne puissent monter dans l'avion, faute de place.

   (b) Exprimez selon les valeurs de Y le gain algébrique supplémentaire G (positif ou négatif) réalisé par la compagnie grâce à cette stratégie.

   (c) Calculez l'espérance et la variance de G.

   (d) Que pensez-vous de cette stratégie ?

Exercice 15

Un système de climatisation régule la température d'un local de manière à ce que celle-ci soit dans une gamme admissible de valeurs : elle ne doit jamais être inférieure à 18°C ou supérieure à 21°C. Lorsque la température atteint l'une de ses valeurs, le système se met en marche de manière à l'empêcher de sortir de cette gamme admissible. En considérant que, sans climatisation, la température Y fluctue selon une loi normale de paramètres $\mu = 18°C$ et $\sigma = 3°C$, quelle est la loi de probabilité de la température X dans le local climatisé ? Tracer sa fonction de répartition.