Feuille de TD 1

Exercice 1

Soit $\mathbb{P}$ une probabilité.

1) Montrer que pour tout événement A, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2) Montrer que pour tous événements A, B : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que $\mathbb{P}[A_n] = 0$ pour tout n, que vaut alors $\mathbb{P}[\cup_n A_n]$?
4) Si on suppose plutôt $\mathbb{P}[A_n] = 1$ pour tout n, que vaut $\mathbb{P}[\cap_n A_n]$?

Exercice 2

On considère une suite infinie de lancers de pièces non-biaisées indépendants.

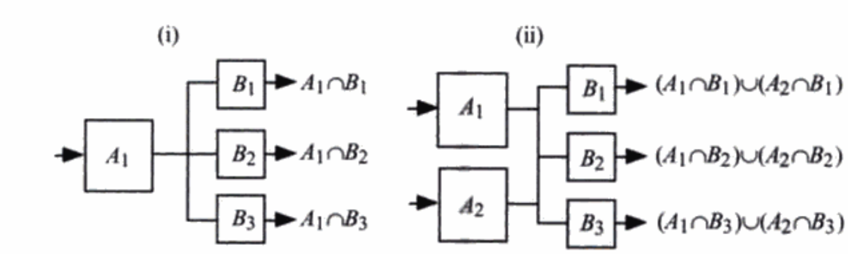
1) Calculer la probabilité d'obtenir FACE aux n premiers lancers.
2) Montrer que la probabilité que PILE n'apparaisse jamais est nulle.
3) Qu'en est-il si chaque pièce a une probabilité $p \in [0, 1]$ de tomber sur PILE ?

Exercice 3

Calculer la probabilité que N élèves d'une classe aient tous une date d'anniversaire différente (on ne prend pas en compte le problème des gens nés le 29 février). Donner une valeur approchée de cette probabilité lorsque $N = 30$.

Exercice 4

Une chaîne de production est composée d'une unité principale A_1 et de trois unités secondaires B_1, B_2, B_3 (voir Figure (i)). On envisage de la moderniser en y ajoutant une seconde unité principale A_2 (voir Figure (ii)).



La chaîne fonctionne tant que les produits fabriqués peuvent rentrer par une unité principale et sortir par une unité secondaire. En cas de surcharge électrique du réseau, chaque unité principale et secondaire peut tomber en panne indépendamment des autres unités avec des probabilités respectives égales à 20% et 40 %. On veut connaitre la probabilité d'un arrêt de la chaîne.

1) On note A_i "l'unité principale n°i fonctionne" et B_i "l'unité secondaire n°j fonctionne". Quelle est la probabilité de A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 ?
2) On note F l'événement "la chaîne fonctionne". Comment s'exprime F en fonction des A_i et B_j, avant et après modernisation de la chaîne ?
3) En déduire la probabilité d'un arrêt de la chaîne s'il y a surcharge électrique avant et après sa modernisation.

Exercice 5

Extrait du blog JADDO du 19/06/16 (`http://www.jaddo.fr/`) :

Prenons un examen médical. Un examen de dépistage, tiens, au hasard. Qui doit répondre par Oui ou par Non à la question "Y a-t-il un signe de cancer ?". Vous le savez, aucun examen n'est fiable à 100%. (...) La probabilité qu'a l'examen de bien trouver l'anomalie s'il y en a une s'appelle la sensibilité. La probabilité qu'a l'examen d'être normal quand il n'y a pas d'anomalie s'appelle la spécificité. La vraie question qui nous intéresse va dans l'autre sens, c'est : "Si le test dit que je suis malade, est-ce qu'il a raison ?". Et ce n'est pas du tout la même question. La probabilité que vous ayez vraiment une anomalie si le test dit qu'il y en a une, ça s'appelle la valeur prédictive positive (VPP pour les intimes). Intuitivement, on a tendance à confondre les deux questions et les deux réponses. Si on dit "Le test a 90% de chances d'être positif si vous êtes malade", on a tendance à croire que "si le test est positif, c'est qu'on a 90% de risque d'être malade", et bin (roulements de tambours) figurez-vous que non dites donc ! (...) Reprenons notre test super balaise de tout à l'heure : 90% de sensibilité, 95% de spécificité. Prenons une maladie assez fréquente, qui touche une personne sur 100. Si votre test revient positif, vous n'avez que 15% de risque d'être malade (et donc 85% de risque d'avoir été inquiété à tort). Pour un test excellent et une maladie pas si rare que ça. Plus la maladie est rare, plus la VPP devient pourrie. Par exemple, pour une maladie qui touche une personne sur 1000, toujours avec le même test (90% de sensibilité, 95% de spécificité), elle chute à 1,8%.

Expliquez.

Exercice 6

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1) On suppose la suite croissante, c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n. Rappeler pourquoi $(\mathbb{P}[A_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de nombres réels. Montrer que dans ce cas,
$$\mathbb{P}[\cup_{n=0}^{\infty} A_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n].$$
(Indice : poser $C_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n$ et remarquer que les C_n sont disjoints.)
2) De la même façon, si la suite est décroissante, montrer que
$$\mathbb{P}[\cap_{n=0}^{\infty} A_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n].$$
3) Lemme de Borel-Cantelli : on ne fait plus d'hypothèse sur les A_n, et on considère
$$A^* = \cap_{n=0}^{\infty} \left(\cup_{k\geq n} A_k\right).$$
On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < +\infty$ est une somme finie. Montrer que $\mathbb{P}[A^*] = 0$.