Feuille de TD n^o 13 : Révisions.

Problème 1 (première session 2010). Dans tout le problème, on fixe un entier $n \geq 1$ et on dispose $n+1$ points numérotés de 0 à n sur un cercle (les points 0 et n sont situés côte à côte). Une particule saute d'un point à un autre de la façon suivante. À chaque étape et quel que soit le point où se trouve la particule, elle a une probabilité 1/2 de se déplacer vers chacun des deux points adjacents.

1. Soit E un espace fini et soit P une matrice de transition sur E, qui est bistochastique, i.e., elle vérifie
$$\forall y \in E \qquad \sum_{x \in E} P(x,y) = 1.$$
Montrer que P admet une mesure de probabilité invariante, que l'on précisera.
2. Posons $X_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, soit X_k le numéro du point occupé par la particule après le k-ième saut. Montrer que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
3. Quelle est la matrice de transition P de la chaîne $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$?
4. Cette matrice est-elle récurrente ?
5. Cette matrice est-elle périodique ?
6. Lorsque la chaîne est apériodique, quelle est la limite de $\mathbb{P}(X_k = j)$ quand k tend vers l'infini ?
7. Soit Q la matrice extraite de P définie par $Q = (P_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$. Montrer que l'inverse de la matrice $I - Q$ (où I est la matrice identité) est la matrice M donnée par
$$\forall i,j \in \{1,\dots,n-1\} \qquad M_{i,j} = \frac{2}{n}\min\{i,j\}(n - \max\{i,j\}).$$
8. Pour tout k différent de 0 ou n, on note $A_{k,n}$ la probabilité pour que partant du point k, le point n soit atteint avant le point 0. On définit les vecteurs suivants :
$$A = (A_{k,n})_{k\in\{1,\dots,n-1\}} \qquad R = (P_{k,n})_{k\in\{1,\dots,n-1\}}.$$
Montrer que l'on a la relation $(I - Q)A = R$.
9. En déduire la valeur de $A_{k,n}$ pour $k \in \{1,\dots,n-1\}$.
10. Quelle est la probabilité pour qu'à son premier retour en 0, la particule ait fait un tour complet du cercle ? (c'est-à-dire qu'elle revienne par le point n si elle est partie par le point 1, ou vice versa). *Indication* : Considérer un état fictif, et se ramener à une chaîne à $n+2$ états.
11. Deux joueurs Paul et Pierre effectuent une suite de parties de pile ou face équilibrées. Après chaque partie, le perdant donne un euro au vainqueur. Le jeu cesse lorsque l'un des joueurs est ruiné. La fortune initiale de Paul est a, celle de Pierre est b. Quelle est la probabilité pour que Paul ruine Pierre ?

Problème 2 (première session 2009). On considère la probabilité de transition Q sur $\mathbb{Z}$ définie par :
- si $x \geq 1$, $Q(x,x-1) = 1/2$ et $Q(x,x+1) = Q(x,x+2) = 1/4$;
- si $x \geq 1$ et si $y - x \notin \{-1,1,2\}$, alors $Q(x,y) = 0$;
- $Q(0,1) = Q(0,-1) = 1/2$;
- si $x \leq -1$, alors $Q(x,y) = Q(-x,-y)$ pour $y \in \mathbb{Z}$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition Q. Notons $\mathbb{P}_x$ la loi de la chaîne de Markov partant de $X_0 = x$ et $\mathbb{E}_x$ l'espérance sous $\mathbb{P}_x$.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}_x(\forall n \geq 1 \ |X_{n+1} - X_n| \geq 1) = 1.$$
2. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, calculer en fonction de X_n
$$\mathbb{E}_x[\exp(-\varepsilon|X_{n+1}|) \mid \mathcal{F}_n].$$
3. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$(\exp(\alpha n - \varepsilon|X_n|))_{n\geq 0}$$
soit une $\mathbb{P}_x$-surmartingale pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

4. Montrer que $\exp(\alpha n - \varepsilon|X_n|)$ converge p.s. sous la loi $\mathbb{P}_x$.
5. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{Z}$
$$\mathbb{P}_x\left(\liminf_{n\to\infty}|X_n| = +\infty\right) = 1.$$
6. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{Z}$
$$\mathbb{P}_x\left(\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty\right\} \cup \left\{\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\right\}\right) = 1.$$
7. Si f est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, on pose
$$\forall x \in \mathbb{Z} \qquad Q(f)(x) = \mathbb{E}_x[f(X_1)].$$
Déterminer les réels β tels que la fonction $f(x) = \exp(\beta x)$ vérifie
$$\forall x \geq 1 \qquad Q(f)(x) = f(x).$$
8. Soit $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par
$$w(x) = \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\exp(-\alpha_0 x) + \mathbb{1}_{\{x<0\}}(2 - \exp(\alpha_0 x)).$$
Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que l'on ait $Q(w)(x) = w(x)$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$.
9. Calculer $\mathbb{P}_x(\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty)$.
10. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $T = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \leq a\}$. Soit $x > a$. Montrer que $(w(X_{n\wedge T}))_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_x$.
11. En déduire $\mathbb{P}_x(T < \infty)$.
12. On dit qu'une fonction s est Q-excessive si $Q(s) \leq s$. Donner la valeur de
$$\inf\{s(x), s \text{ fonction } Q\text{-excessive et positive avec } s(a) = 1\}.$$