Feuille de TD n^o 11 : Chaînes de Markov : convergence. Processus de Galton-Watson

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $E = \{1,2,3,4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la chaîne est irréductible et trouver la probabilité invariante.

Exercice 2. Soit Q la fonction de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par :

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ et $p_i + r_i + q_i = 1$ pour $i \geq 1$. Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction de transition Q.

1. Montrer que X est irréductible.
2. Montrer que X admet une mesure réversible ζ (avec $\zeta(0) = 1$) et déterminer ζ. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une mesure de probabilité invariante.
3. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p < q$. Calculer $\mathbb{E}_i(H_i)$ pour tout $i \geq 0$, où $H_i = H_i(X_0, X_1, ...) = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = i\}$ désigne le premier temps de retour en i.

Exercice 3. Modèle d'Ehrenfest de diffusion des gaz. Un ensemble de m boules, numérotées $1, \dots, m$, est réparti dans deux boîtes. L'état X_n du système est spécifié par le nombre de boules dans la première boîte, si bien que l'espace d'états est $E = \{0, 1, \dots, m\}$. A chaque étape on tire un numéro entre 1 et m (selon la loi uniforme et indépendamment des tirages précédents) et on change de boîte la boule portant ce numéro.

1. Trouver la matrice de transition P de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$.
2. La chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle irréductible ? Apériodique ?
3. Déterminer la mesure de probabilité invariante. Commenter ce résultat.

Exercice 4. Propriété de Markov forte et théorème ergodique. On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, et $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ sa filtration naturelle.

1. Soit T un temps d'arrêt et f une fonction mesurable positive. Montrer la propriété de Markov forte :

$$\forall x \in E \qquad \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} f(X_T, X_{T+1}, ...)|\mathcal{F}_T] = \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \mathbb{E}_{X_T}[f(X_0, X_1, ...)].$$

On suppose maintenant que la chaîne est récurrente irréductible, et on note μ sa probabilité invariante. Soit f une fonction mesurable positive telle que $\int_E f d\mu < \infty$, et x un point de E. On définit les instants du n-ième retour en x par récurrence : $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \inf\{k > T_n \,:\, X_k = x\}$. On note $N_x(n)$ le nombre de retours en x effectués par la chaîne avant l'instant n. On pose aussi pour tout $k \geq 0$,

$$Z_k(f) = \sum_{n=T_k}^{T_{k+1}-1} f(X_n).$$

2. Montrer que les T_n sont des temps d'arrêt finis p.s.
3. En utilisant la propriété de Markov forte, montrer que les $Z_k(f)$ sont des variables indépendantes et de même loi. Calculer $\mathbb{E}_x(Z_0(f))$ en fonction de $\int_E f d\mu$.
4. Montrer que $\mathbb{P}_x$-p.s.

$$\frac{1}{N_x(n)} \sum_{k=0}^{n} f(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mu(x)} \int_E f d\mu.$$

5. En déduire le théorème ergodique :

$$\mathbb{P}_x\text{-p.s.} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f d\mu.$$

6. *Application* : On reprend l'énoncé de l'exercice 1. Calculer $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n} X_k$ et $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n} X_k^2$.

Exercice 5. On note X_n le nombre de particules présentes à l'instant n dans un volume donné V. On suppose que, pendant l'intervalle de temps $[n, n+1[$, chacune des X_n particules a une probabilité $p = 1-q$, $0 < p < 1$ de quitter V et que, pendant ce même intervalle, un nombre aléatoire de particules suivant une loi de Poisson de paramètre λ entre dans V. On suppose que les différents phénomènes aléatoires ainsi considérés sont indépendants les uns des autres.

1. (a) Calculer $\mathbb{E}(e^{itX_1}|X_0 = x)$.
   (b) On suppose que X_0 suit une loi de Poisson de paramètre θ, notée μ_θ. Quelle est la fonction caractéristique de X_1 ? Montrer que, pour une valeur de θ convenable, μ_θ est une probabilité invariante.
2. Montrer que la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est donnée par

$$Q(x,y) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x\wedge y}\binom{x}{k} q^k(1-q)^{x-k}\frac{\lambda^{y-k}}{(y-k)!}.$$

   En déduire que cette chaîne est irréductible et donc récurrente positive.
3. Quelle est la limite de $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ lorsque n tend vers l'infini ? Et de $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$?

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans E dénombrable, irreductible récurrente positive, de matrice de transition Q et de probabilité invariante π. Pour toute fonction h définie sur E, on pose $< h,\pi >= \sum_{x\in E} h(x)\pi(x)$. Soit f une fonction bornée sur E telle que $< f,\pi >= 0$. On suppose qu'il existe une fonction bornée g vérifiant $(I-Q)g = f$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(X_k)$. On souhaite étudier le comportement asymptotique de $n^{-1}\mathbb{E}(S_n^2)$.

1. Quelle est la limite de $n^{-1}\mathbb{E}(S_n)$ pour $n\to\infty$?
2. Montrer qu'on a la décomposition $S_n = M_n + Z_n$ où

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{k=1}^{n} U_k, \quad U_k = g(X_k) - Qg(X_{k-1}), \quad Z_n = g(X_0) - Qg(X_n).$$

3. Montrer que $\mathbb{E}(U_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$ où $\mathcal{F}$ est la filtration canonique du processus $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et que $\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} U_k^2)$.
4. Montrer que $\mathbb{E}(g(X_{k+1})Qg(X_k)) = \mathbb{E}((Qg)^2(X_k))$. En déduire que

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{n-1} g(X_{k+1})Qg(X_k)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} < (Qg)^2,\pi > .$$

5. On pose $\Sigma^2 =< g^2 - (Qg)^2,\pi >$. Montrer que $n^{-1}\mathbb{E}(M_n^2)$ tend vers Σ^2 quand n tend vers l'infini.
6. Montrer que $n^{-1}\mathbb{E}(S_n^2)$ tend vers Σ^2 quand n tend vers l'infini.

Exercice 7. Processus de Galton-Watson. Soit $(p_k)_{k\geq 0}$ une suite sur $\mathbb{N}$ telle que $0 < p_0 < 1$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k = 1$. Le processus de Galton-Watson modélise la situation suivante : au temps 0, on a une particule qui au temps 1 va se subdiviser aléatoirement en k particules, $k\geq 0$, avec une probabilité p_k. Et ainsi de suite pour chacune des particules créées, chacune se subdivisant indépendamment des autres. On note Z_n le nombre de particules au temps n. On pose $f(s) = \sum_{k\geq 0} p_k s^k$, $m = \sum_{k\geq 0} kp_k$ et $T_0 = \inf\{n\geq 0, Z_n = 0\}$.

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale, une sous-martingale ou une sur-martingale suivant les valeurs de m. Que peut-on dire de $W_n = Z_n/m^n$?
2. On suppose $m < 1$. Montrer que Z_n tend presque sûrement vers 0.
3. On suppose $m = 1$. Montrer que Z_n tend presque sûrement vers une variable aléatoire Z_∞ finie presque sûrement. Classifier les états de la chaîne de Markov $(Z_n)_{n\geq 0}$. En déduire que $Z_\infty = 0$ p.s.
4. On suppose $m > 1$ et on note q l'unique solution de $f(s) = s$ dans $]0,1[$. Montrer que $Y_n = q^{Z_n}$ est une martingale. Montrer que $q = \mathbb{P}(T_0 < \infty)$.