Feuille d'exercices n°8

Exercice 1 - Montrer que l'on n'a pas, en général, pour $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{h\to 0} \|f - \tau_h f\|_\infty = 0.$$

Indication. Considérer la fonction $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$ (fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$).

Exercice 2 - Soient deux réels finis $-\infty < a < b < \infty$. On introduit les deux fonctions indicatrices :

$$f = \mathbb{1}_{[-a,a]}, \qquad g = \mathbb{1}_{[-b,b]}.$$

1. Montrer que f et g sont convolables et donner l'expression explicite de $f * g$.
2. Quelle est la régularité de f et de g ? Quelle est celle de $f * g$? S'améliore-t-elle ?

Exercice 3 -

1. Soient trois fonctions intégrables $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que le produit de convolution est associatif :
$$(f * g) * h = f * (g * h).$$
2. Soient maintenant les trois fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:
$$f := \mathbb{1}_{[0,\infty[}, \qquad g := \mathbb{1}_{[-1,0]} - \mathbb{1}_{[0,1]}, \qquad h := \mathbb{1}_{\mathbb{R}}.$$
Montrer que $(f * g) * h \equiv 1$ puis que $f * (g * h) \equiv 0$. Interpréter.

Exercice 4 - Pour $a > 0$, on définit une fonction $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g_a(x) := \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

1. Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a
$$g_a * g_b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}),$$
et aussi :
$$g_a * g_b \in \bigcap_{1\le p\le\infty} L^p(\mathbb{R}).$$
2. Montrer que, pour tous $a, b > 0$, on a
$$g_a * g_b = g_{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exercice 5 - Soit β et L deux réels strictement positifs. On note ℓ le plus grand entier strictement inférieur à β. Soit f qui vérifie la propriété de Hölder suivante : f est dérivable ℓ fois et sa dérivée ℓ-ème vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad |f^{(\ell)}(y) - f^{(\ell)}(x)| \le L|x - y|^{\beta-\ell}.$$

Soit K un noyau d'ordre ℓ, c'est à dire une fonction d'intégrale 1 vérifiant

$$\forall j \in \{1, \dots, l\} \qquad \int u^j K(u) du = 0.$$

On supose également que $\int |u|^\beta |K(u)| du < \infty$ et on note

$$C = \frac{L}{\ell!} \int |u|^\beta |K(u)| du.$$

Pour tout $h > 0$, on note $K_h(x) = K(x/h)/h$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de s'intéresser à l'errreur d'approximation de f par $K_h * f$ au point x_0.

1. Montrer que
$$K_h * f(x_0) - f(x_0) = \int K(u)[f(x_0 - uh) - f(x_0)] du.$$
2. Montrer qu'il existe $\tau \in [0, 1]$ tel que
$$K_h * f(x_0) - f(x_0) = \int K(u) \frac{(-uh)^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x_0 - \tau uh) du,$$
puis que
$$K_h * f(x_0) - f(x_0) = \int K(u) \frac{(-uh)^\ell}{\ell!} [f^{(\ell)}(x_0 - \tau uh) - f^{(\ell)}(x_0)] du.$$
3. En déduire que
$$|K_h * f(x_0) - f(x_0)| \leq C h^\beta.$$
Quel h faut-il prendre pour que $K_h * f$ soit une bonne approximation de f en x_0 ?
4. Donner des exemples de propriétés vérifiées par $K_h * f$ mais pas par f (pour un noyau bien choisi).

Exercice 6 - *(Théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass)* Soient $a < b$ des réels et $f \in \mathscr{C}([a, b])$. L'objectif est de montrer qu'il existe une suite (p_n) de fonctions polynomiales sur $[a, b]$ vérifiant

$$\sup_{a \leq t \leq b} |f(t) - p_n(t)| \to 0, n \to \infty.$$

Pour ce faire (la preuve qui suit est due à E. Landau), on commence par supposer, quitte à retrancher à f une fonction affine, que l'on a $f(a) = f(b) = 0$. On pose $R := b - a > 0$ et on définit une fonction $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$q(t) := \begin{cases} R^2 - t^2 & \text{si } |t| \leq R, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étape 1. On commence par prouver que, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\int_{-\infty}^{-\delta} [q(t)]^n \, dt + \int_\delta^\infty [q(t)]^n \, dt}{\int_\mathbb{R} [q(t)]^n \, dt} = 0.$$

1. Montrer que le résultat est trivial si $\delta \geq R$. On suppose donc à présent que l'on a $\delta < R$.

2. Démontrer la relation suivante pour tout $n \geq 1$:
$$\int_\delta^\infty [q(t)]^n \, dt \leq R[q(\delta)]^n.$$
En déduire que l'on a $\int_{-\infty}^{-\delta} [q(t)]^n \, dt + \int_\delta^\infty [q(t)]^n \, dt \leq 2R[q(\delta)]^n$ pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que l'on a
$$\int_{\mathbb{R}} [q(t)]^n \, dt \geq \delta \left[q\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^n.$$
4. Conclure.

Étape 2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, une fonction $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$Q_n(t) := \frac{[q(t)]^n}{\int_{\mathbb{R}} [q(s)]^n \, ds}.$$
On vérifie facilement que l'on a $Q_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}$, $Q_n(t) = 0$ pour $|t| \geq R$, $\int_{\mathbb{R}} Q_n(t) \, dt = 1$ et que, pour tout $\delta > 0$, on a :
$$\int_{-\infty}^{-\delta} Q_n(t) \, dt + \int_\delta^\infty Q_n(t) \, dt \to 0, n \to \infty.$$
On définit alors $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$p_n := Q_n * \tilde{f},$$
où $\tilde{f}$ est la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par $\tilde{f}(t) = f(t)$ pour $t \in [a, b]$ et $\tilde{f}(t) = 0$ pour $t \notin [a, b]$. On veut montrer que (p_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$.

1. On commencera par rappeler brièvement pourquoi le produit de convolution ci-dessus est bien défini.
2. Fixer $t \in \mathbb{R}$ et montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\tilde{f}(t) - p_n(t) = \int_{\mathbb{R}} Q_n(s)[\tilde{f}(t) - \tilde{f}(t-s)] \, ds.$$
3. En déduire que l'on a, pour tout $\delta > 0$ (avec $\|\tilde{f}\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |\tilde{f}(t)| = \sup_{a\leq t\leq b} |f(t)|$) :
$$|\tilde{f}(t) - p_n(t)| \leq \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(s)|\tilde{f}(t) - \tilde{f}(t-s)| \, ds + 2\|\tilde{f}\|_\infty \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_\delta^\infty\right] Q_n(s) \, ds.$$

Étape 3. Fixons $\epsilon > 0$. On se propose à présent de montrer qu'il existe un entier N tel que l'on ait $\|\tilde{f} - p_n\|_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}} |\tilde{f}(t) - p_n(t)| \leq \epsilon$ pour $n \geq N$.

1. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait $|\tilde{f}(t) - \tilde{f}(s)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ dès que $s, t \in \mathbb{R}$ vérifient $|s-t| \leq \delta$.
2. En particularisant les résultats de l'étape 2 au $\delta > 0$ obtenu au point précédent, montrer que l'on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$|\tilde{f}(t) - p_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2\|\tilde{f}\|_\infty \left[\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_\delta^\infty\right] Q_n(s) \, ds.$$
3. Conclure.

Étape 4. Il reste à montrer que la restriction de p_n à $[a, b]$ est un polynôme, pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'on a, pour tout $a \leq t \leq b$:
$$p_n(t) = \int_a^b f(s)c_n^{-1}[R^2 - (t-s)^2]^n \, ds,$$
où l'on a posé $c_n := \int_{\mathbb{R}} [q(t)]^n \, dt$.
2. Écrire finalement $c_n^{-1}[R^2 - (t-s)^2]^n = \sum_{j=0}^{2n} a_j(s)t^j$, où les a_j, $0 \leq j \leq 2n$ sont des polynômes, et conclure.