Feuille d'exercices n°7

Exercice 1 - En appliquant l'identité de Parseval aux fonctions $u : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ et $v : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définies par $u(t) := |t|$ et $v(t) := t^2$ pour $|t| \leq \pi$, montrer que l'on a :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 2 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et 2π-périodique.

1. On suppose que f est de classe C^∞. Montrer que pour tout entier k, $c_n(f) = o(1/n^k)$ quand $|n| \to +\infty$.
2. Réciproquement, on suppose que $c_n(f) = o(1/n^k)$ pour tout entier k et on pose $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.
   (a) Calculer les coefficients de Fourier de S.
   (b) Démontrer que S est de classe C^∞.
   (c) En utilisant le théorème de Parseval, montrer que $f = S$ et donc que f est de de classe C^∞.
3. Quel théorème a-t-on ainsi démontré ?

Exercice 3 - On considère la série de fonctions :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^3(n\theta)}{n!}$$

1. Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $S(\theta)$ sa somme.
2. Montrer que S est de classe C^∞ et $2\pi-$ périodique.
3. En développant $\sin^3(n\theta)$, exprimer $S(\theta)$ en fonction de (justifier aussi l'existence) :
$$\sigma(\theta) := \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n!},$$
4. Montrer que $S(\theta)$ est développable en série de Fourier et trouver son développement.
5. En considérant aussi
$$\tau(\theta) := \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n\theta)}{n!},$$
calculer explicitement $\tau(\theta) + i\sigma(\theta)$.
6. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a la formule explicite :
$$S(\theta) = \frac{3}{4} \sin(\sin\theta) e^{\cos\theta} - \frac{1}{4} \sin(\sin 3\theta) e^{\cos 3\theta}.$$

Exercice 4 - Pour $0 \leq r < 1$ et $\theta \in \mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, on note $P_r(\theta)$ le noyau de Poisson défini par :

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2}$$

1. Montrer que
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = P_r(\theta).$$
2. Montrer que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, et pour tout $0 \leq r < 1$:
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e^{in\theta} = \int_{[-\pi,\pi]} f(t) P_r(\theta - t) \frac{dt}{2\pi}.$$
3. Montrer que
   - Pour tout $\theta \in \mathbb{T}$ et tout $r \in [0, 1[, \quad P_r(\theta) > 0;$
   - $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 1;$
   - Pour tout $\delta > 0$, petit, on a la convergence uniforme
$$\lim_{r \to 1^-} \|P_r\|_{\mathcal{C}^0([-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi])} = 0.$$
4. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ une fonction continue $2\pi-$périodique. Montrer que
$$\lim_{r \to 1^-} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|} e^{in\theta} = f(\theta).$$

Exercice 5 - Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ où $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$. On dit que f est *définie positive* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $(\theta_1, .., \theta_n) \in \mathbb{T}^n$, et tout $(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\sum_{1 \leq j,k \leq n} f(\theta_j - \theta_k) c_j \overline{c_k} \geq 0.$$

1. Soit $m \in \mathbb{N}$ et soit :
$$\phi(\theta) = \sum_{n=-m}^{m} a_n e^{in\theta}, \quad \text{avec tous les} \quad a_n \geq 0.$$
Montrer que ϕ est définie positive.
2. Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$ avec $c_n(f) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Déduire de la question précédente que f est définie positive.
3. Soit $f, g \in C^0(\mathbb{T})$. On introduit la fonction
$$F(\theta) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta') g(\theta') \frac{d\theta'}{2\pi}.$$
Calculer les coefficients de Fourier de F en fonction des coefficients $c_n(f)$ et $c_n(g)$.
4. Soit f définie positive. Pour toute fonction $g \in C^0(\mathbb{T})$, montrer que l'on a :
$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta') g(\theta) \overline{g(\theta')} \, d\theta \, d\theta' \geq 0.$$

5. Soit f définie positive. Déduire du 4) que $c_n(f) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6 - Soit f une fonction $2\pi-$périodique et intégrable. On note c_k ses coefficients de Fourier, et on suppose que la quantité $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |k||c_k|^2$ est finie.

1. Montrer que f est de carré intégrable.
2. Pour un x donné , on note $s_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ la $n-$ème somme partielle de la série de Fourier et $\sigma_n(x)$ la $n-$ème somme de Fejér. Exprimer la différence $\delta_n(x) = s_n(x) - \sigma_n(x)$ en fonction des c_k et de x et n.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $n \geq N$. Prouver
$$\sum_{N\leq|k|\leq n} |k||c_k| \leq n\sqrt{2\sum_{k\in\mathbb{Z},|k|\geq N} |k||c_k|^2}.$$
4. Prouver alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{|k|\leq n} |k||c_k| = 0.$
5. Prouver que (δ_n) converge uniformément vers 0.
6. On suppose de plus que f est une fonction continue. Montrer que la série de Fourier converge uniformément (vers f).
7. Montrer que l'hypothèse $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |k||c_k|^2 < +\infty$ est vérifiée en particulier lorsqu'il existe une constante C telle que $|c_k| \leq \dfrac{C}{|k|\ln|k|}$, pour $|k| \geq 2$.

Exercice 7 - Soit $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ la fonction indicatrice d'un intervalle fermé $[a,b] \subset [-\pi,\pi]$ avec $a < b$, définie pour $x \in \mathbb{R}$ par la formule :
$$\chi_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer par le calcul que la série de Fourier de f vaut :
$$S(f)(\theta) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2i\pi n} e^{in\theta}.$$
2. Montrer que
$$S(f)(\theta) - \frac{b-a}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{\sin\left(n\frac{b-a}{2}\right)}{n} e^{in(\theta-\frac{a+b}{2})}.$$
En déduire que si $b - a \neq 2\pi$, cette série de Fourier ne converge pas absolument.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{in\theta}}{n}$ est convergente.
Indication. Si $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$ sont deux suites de nombres réels quelconques, alors pour tout $n \geqslant 2$ on a la sommation par parties :
$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\big[b_k + \cdots + b_1\big] = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - a_n\big(b_1 + \cdots + b_n\big),$$
ce qui permet de déduire le *critère de convergence d'Abel : si la suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ est positive, décroissante, convergente vers zéro, et si la suite $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n\geqslant 1}$ est bornée, alors la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ converge.*
4. Montrer que la série de Fourier de f converge en tout point $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il lorsque $a = -\pi$ et $b = \pi$?