Licence MFA — Orsay 2017–2018

Intégration et analyse de Fourier

Feuille d'exercices n°6

Exercice 1 - On note ℓ^∞ l'ensemble des suites $\mathbf{z} = (z_n) \in \mathbb{C}^\infty$ vérifiant $\sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n| < +\infty$.

1. Montrer que la formule $\|(z_n)\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |z_n|$ définit une norme sur ℓ^∞.
2. Montrer que $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable.

   Indication. Montrer que si les suites $\mathbf{z} \in \{0,1\}^\infty$ et $\mathbf{z}' \in \{0,1\}^\infty$ sont distinctes, alors les boules $B(\mathbf{z}, 1/2)$ et $B(\mathbf{z}', 1/2)$ sont disjointes.

Exercice 2 - On munit $\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes, d'un produit scalaire quelconque $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Soit $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. On note $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la famille orthonormale construite par le procédé de Gram-Schmidt à partir des monômes $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$, et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} P_i.$$

1. Montrer que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 3 - Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. On suppose que les suites $(u_n) \subseteq B[0,1] \subseteq H$ et $(v_n) \subseteq B[0,1] \subseteq H$ vérifient

$$\langle u_n, v_n\rangle \to 1, n \to \infty.$$

1. Montrer que l'on a nécessairement $\|u_n\| \to 1$, $n \to \infty$.
2. Montrer que l'on a aussi $\|v_n\| \to 1$, $n \to \infty$.
3. Conclure que l'on a $\|u_n - v_n\| \to 0$, $n \to \infty$.
4. Peut-on conclure de ce qui précède que (u_n) et (v_n) convergent dans H vers une limite commune?
5. Peut-on conclure de ce qui précède qu'il existe une suite d'entiers (n_k) strictement croisssante telle que (u_{n_k}) et (v_{n_k}) convergent dans H vers une limite commune?

Exercice 4 -

Soit H un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H converge faiblement vers un élément x de H si, pour tout $y \in H$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n \mid y\rangle = \langle x \mid y\rangle.$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.

1. En supposant qu'elle existe, montrer que la limite faible d'une suite est unique.
2. Montrer que la convergence forte implique la convergence faible, c'est-à-dire : $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.
3. Montrer que $[x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|] \Rightarrow x_n \to x$.
4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale de H. Montrer que $x_n \rightharpoonup 0$ mais $x_n \not\to 0$.
   On pourra utiliser que $H = \overline{\mathrm{Vect}(x_n)} \oplus (\mathrm{Vect}(x_n))^\perp$.

Exercice 5 -

Soit H un espace de Hilbert. Soit C un sous-ensemble de H convexe fermé non vide. On note P_C l'opérateur de projection sur C.

1. Montrer que P_C est 1-lipschitzien.
2. Soient C_1, C_2 des parties convexes, fermées et non vides de H telles que $C_1 \subset C_2$. Démontrer que pour tout $x \in H$,
   $$\|P_{C_1}(x) - P_{C_2}(x)\|^2 \leq 2\big(d(x,C_1)^2 - d(x,C_2)^2\big).$$
   Indication: Appliquer l'identité du parallélogramme aux deux vecteurs $x - P_{C_1}(x)$ et $x - P_{C_2}(x)$.

Exercice 6 - Déterminer a, b, c qui minimisent
$$\int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx.$$

Exercice 7 - Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormale de H. Soit V la fermeture du sous-espace engendré par la famille $(e_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $x \in H$, on pose $\alpha_n = \langle x \mid e_n\rangle$.

1. Montrer que la série de terme général $(|\alpha_n|^2)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$. En déduire que la suite $(\sum_{k=0}^n \alpha_k e_k)_{n\geq 0}$ converge dans H.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e_n = x_V$ où x_V est la projection de x sur V. En déduire que $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 = \|x_V\|^2 \leq \|x\|^2$.
3. Montrer que $x \in H$ appartient à V si et seulement si $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2$.

Exercice 8 - Dans l'espace vectoriel $C([0,1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, muni de la norme uniforme
$$\|u\|_\infty := \max\{|u(x)| : 0 \leq x \leq 1\},$$
construire une suite libre et totale $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction $u \in C([0,1])$ telles que l'on ait
$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k u_k$$
pour des suites *distinctes* $(\alpha_k) \in \mathbb{R}^\infty$, $(\beta_k) \in \mathbb{R}^\infty$. Comparer cette situation à la décomposition dans une base hilbertienne.