Feuille d'exercices n°2

Préliminaires : limites supérieures et dénombrabilité

Exercice 1 - Étant donné une suite quelconque $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, on considère la suite associée :

$$b_n^- := \inf\{b_m :\ m \geqslant n\}.$$

1. Montrer que cette suite $(b_n^-)_{n\geqslant 1}$ est croissante. On définit alors (justifier) : $\liminf_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} b_n^-$, un nombre appartenant à $[-\infty, +\infty]$.

2. Symétriquement, on définit :

$$\limsup_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{b_m :\ m \geqslant n\},$$

un nombre appartenant aussi à $[-\infty, +\infty]$. Montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une certaine limite $b \in [-\infty, +\infty]$ si et seulement si :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

3. Dans le cas général où aucune hypothèse n'est faite sur la convergence de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$, réinterpréter ce qui précède en démontrant qu'il existe toujours une sous-suite $\big(n_k\big)_{k\geqslant 1}$ telle que $\big(b_{n_k}\big)_{k\geqslant 1}$ converge vers :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n \ = \ \lim_{k\to\infty} b_{n_k}.$$

Exercice 2 - Soient (a_n), (b_n) deux suites réelles majorées.

1. Montrer que $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

2. Que dire de plus si (b_n) converge ?

3. Soit $u_n = (-1)^n + n\sin\big(\frac{1}{n}\big)$. Déterminer $\liminf_{n\to\infty} u_n$ et $\limsup_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 3 - *Dénombrabilité*

1. Montrer que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable.

2. Soit f une injection de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$, et a_n^p le p-ème chiffre du développement décimal de $f(n)$. Soit x un réel de $[0,1]$ de développement décimal

$$x = 0, b_1 b_2 \dots$$

où pour tout k, b_k est différent de a_k^k (et différent de 0 ou 9 de telle sorte qu'il y a unicité du développement décimal de x). Y a-t-il un n tel que $x = f(n)$? f peut-elle être une bijection ? Que peut-on en déduire sur $[0,1]$?

Ensemble mesurables, mesure de Lebesgue

Exercice 4 - Calculer la mesure de Lebesgue de l'ensemble

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left] \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} \right[.$$

Exercice 5 - Soient m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ telle que $\sum_{j\in J} m(I_j) < b-a$ pour deux nombres $a<b$. Montrer que $[a,b] \not\subset \bigcup_{j\in J} I_j$.

Exercice 6 - On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $A \in \mathbb{R}$ tel que $m(A)=0$. Montrer que son complémentaire est dense dans $\mathbb{R}$. Réciproque ?

2. Déterminer $\inf\{m(U), U$ ouvert dense dans $\mathbb{R}\}$.

3. "Vrai ou Faux ?" :

(a) Un ouvert de $\mathbb{R}$ est borné si et seulement si sa mesure de Lebesgue est finie.

(b) Un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ est de mesure de Lebesgue nulle si et seulement si il est dénombrable.

(c) La mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$ est strictement positive si et seulement si il contient un ouvert non vide.

Exercice 7 - Soit un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ et, pour $n \geqslant 1$ entier, soit l'ouvert:

$$\mathcal{O}_n := \big\{x \in \mathbb{R}\colon\ \mathsf{dist}(x,E) \ < \ 1/n\big\}.$$

1. Lorsque E est compact et mesurable, montrer que:

$$m(E) = \lim_{n\to\infty} m\big(\mathcal{O}_n\big).$$

2. Lorsque E est fermé et non borné, montrer que cette conclusion peut devenir fausse.

3. Lorsque E est ouvert et borné, montrer que cette conclusion peut aussi être mise en défaut.

Exercice 8 - *Existence d'une partie non mesurable de* $\mathbb{R}$.

1. On considère la relation définie sur $[0,1]$ par $x \sim y$ ssi $x-y \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Ainsi on peut écrire $[0,1]$ comme la réunion disjointe de toutes les classes d'équivalences $\mathcal{C}_\alpha$: $[0,1] = \bigcup_{\alpha\in A} \mathcal{C}_\alpha$, les indices α parcourant un certain ensemble A. Grâce à l'Axiome du choix, que nous admettons ici, on peut alors sélectionner pour tout $\alpha \in A$ un unique élément : $x_\alpha \in \mathcal{C}_\alpha$. On pose alors

$$\mathcal{N} := \bigcup_{\alpha\in A} \{x_\alpha\}.$$

2. Comme l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable, il existe une énumération $\big\{r_k\big\}_{k=1}^{\infty}$ de son sous-ensemble $\mathbb{Q} \cap [-1,\, 1]$. Montrer que les translatés :

$$\mathcal{N}_k := \mathcal{N} + r_k \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

sont tous contenus dans $[-1, 2]$, puis que

$$[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k \subset [-1, 2].$$

3. Montrer que ces ensembles $\mathcal{N}_k$ sont disjoints deux à deux : $\mathcal{N}_{k_1} \cap \mathcal{N}_{k_2} = \emptyset$ $(1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant \infty)$.

4. Montrer alors que $\mathcal{N}$ n'est *pas* Lebesgue-mesurable.

Fonctions mesurables

Exercice 9 -

1. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue sauf en un nombre dénombrable de points est mesurable.

2. Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est mesurable.

3. Montrer que toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ est mesurable.

4. Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, p \wedge q = 1, (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$ est mesurable.

Exercice 10 - Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à droite. En considérant les fonctions

$$f_p : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{k+1}{2^p}\right) \mathbf{1}_{\left[\frac{k}{2^p}, \frac{k+1}{2^p}\right[}(x),$$

montrer que f est mesurable.

Exercice 11 - Soit $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un ensemble de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que les fonctions f_t soient mesurables et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f_t(x)$ soit continue à droite.

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\{x \in \mathbb{R} | \sup_{t \in \mathbb{R}} f_t(x) > a\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \{x \in \mathbb{R} | f_t(x) > a\}$.

2. En déduire que la fonction $\sup_{t \in \mathbb{R}} f_t$ est mesurable.

Exercice 12 - On note m la mesure de Lebesgue. On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ dépendant d'un réel x a lieu m-pp ("presque partout") s'il existe un ensemble mesurable A tel que $\mathcal{P}(x)$ est réalisé pour tout $x \in A$ et $m(A^c) = 0$.

1. Quelles sont les fonctions continues sur $[0, 1]$ nulles m-pp? Le résultat subsiste-t-il si l'on remplace continues par mesurables ?

2. Peut-on comparer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues m-pp et l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ m-pp égales à une fonction continue définie partout ?