Corrigé du devoir n°2

Exercice 1 -

1. Comme A est mesurable et positive, le théorème de Tonelli assure que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction tranche $A_x : y \mapsto A(x,y)$ est mesurable. Par ailleurs, f est mesurable. On en déduit que $y \mapsto A(x,y)f(y)$ est mesurable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, l'hypothèse entraîne que $A_x \in L^1(\mathbb{R})$. L'inégalité de Hölder nous assure alors que $y \mapsto A(x,y)f(y) \in L^1(\mathbb{R})$ et ainsi que $Tf(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et de plus
$$\text{p.p.} x \in \mathbb{R} \ , |Tf(x)| \leqslant \|f\|_\infty \int A(x,y)\, dy \leqslant C_0 \|f\|_\infty.$$
   (b) Pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $(x,y) \mapsto A(x,y)f(y)g(x)$ est une classe de fonctions mesurables, cette classe est intégrable si et seulement si
$$\iint A(x,y)|f(y)||g(x)|\, dx\, dy < +\infty\ .$$
   Or, en utilisant le théorème de Tonelli,
$$\int \left(\int A(x,y)|f(y)|\, dy \right) |g(x)|\, dx \leqslant C_0 \|f\|_\infty \int |g(x)|\, dx = C_0 \|f\|_\infty \|g\|_1 < +\infty.$$
   Ce qui démontre que $(x,y) \mapsto A(x,y)f(y)g(x)$ est une classe de fonctions intégrables.
   (c) En appliquant maintenant le théorème de Fubini à la fonction intégrable $(x,y) \mapsto A(x,y)f(y)g(x)$, on en déduit que $x \mapsto \int A(x,y)f(y)g(x)\, dy = Tf(x)g(x)$ est mesurable.
   (d) La linéarité de l'opérateur T est claire.Vérifions que T opère bien sur $L^\infty(\mathbb{R})$, autrement dit que pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R}), T(f) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Compte-tenu de la question 2.(a), le seul point délicat est la mesurabilité de $T(f)$. Selon 2.(c), on sait que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R}),\ x \mapsto Tf(x)g(x)$ est mesurable. Or il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\frac{1}{g}$ est mesurable et ainsi $x \mapsto Tf(x)$ est mesurable. On en déduit par la question 2.(a) que T définit un opérateur linéaire borné de $L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$, de norme $\|T\|_{\infty,\infty} \leqslant C_0$.

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On a par le théorème de Tonelli,
$$\iint A(x,y)|f(y)|dxdy = \int \left(\int A(x,y)|f(y)|\, dx \right)\, dy$$
   et selon l'hypothèse
$$\int |f(y)| \left(\int A(x,y)\, dx \right)\, dy \leqslant C_0 \int |f(y)|\, dy = C_0 \|f\|_1 < +\infty.$$
   Ce qui démontre que la fonction $(x,y) \mapsto A(x,y)f(y)$ est intégrable. Le théorème de Fubini nous assure alors que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto A(x,y)f(y)$ est intégrable (on pouvait aussi dire que $T|f|$ est fini presque partout car intégrable). On en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $Tf(x)$ est bien défini. Le théorème de Fubini assure aussi que Tf est intégrable. On a ainsi défini une fonction Tf dans $L^1(\mathbb{R})$ et
$$\|Tf\|_1 = \int |Tf(x)|dx \leqslant \iint A(x,y)|f(y)|dydx \leqslant C_0 \|f\|_1.$$

4. (a) Comme $(x, y) \mapsto A(x, y)f(y)$ est une fonction mesurable et positive, le théorème de Tonelli nous assure de la mesurabilité de Tf.

   (b)
$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} A(x, y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}} A^{\frac{1}{p}}(x, y)f(y)A^{1-\frac{1}{p}}(x, y)dy.$$

   L'inégalité de Hölder appliquée aux fonctions mesurables et positives $y \mapsto A^{\frac{1}{p}}(x, y)f(y)$ et $y \mapsto A^{1-\frac{1}{p}}(x, y)$ nous donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$Tf(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} A(x, y)f^p(y)dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} A(x, y)dy\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

   On en déduit par l'hypothèse que
$$Tf(x) \leqslant C_0^{1-\frac{1}{p}}\left\{\int_{\mathbb{R}} A(x, y)f(y)^p dy\right\}^{1/p}.$$

   (c) $||Tf||_p^p = \int_{\mathbb{R}}(Tf(x))^p dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} C_0^{p-1}\left\{\int_{\mathbb{R}} A(x, y)f(y)^p dy\right\}dx.$
   En utilisant à nouveau Tonelli
$$\int_{\mathbb{R}} C_0^{p-1}\left\{\int_{\mathbb{R}} A(x, y)f(y)^p dy\right\}dx = \int_{\mathbb{R}} C_0^{p-1}(f(y))^p\left\{\int_{\mathbb{R}} A(x, y)dx\right\}dy.$$

   D'où, par l'hypothèse,
$$\|Tf\|_p^p \leqslant \int_{\mathbb{R}} C_0^{p-1}(f(y))^p C_0 dy \leqslant C_0^p\|f\|_p^p.$$

5. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour un $p \in]1, +\infty[$, mais sans supposer que f est à valeurs positives.

   (a) D'après la question précédente, $T|f|$ est mesurable et$\|T|f|\|_p^p \leqslant C_0^p\|f\|_p^p$. Ce qui démontre que $T|f| \in L^p(\mathbb{R})$. On en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $T|f|(x) < +\infty$ et donc pour ces "x", $y \mapsto A(x, y)f(y)$ est intégrable en y, ce qui permet de définir $Tf(x)$ par (1) (en décidant d'attribuer la valeur 0 sur l'ensemble négligeable restant).

   (b) On souhaite montrer que $x \mapsto Tf(x)g(x)$ est mesurable, on va donc utiliser le théorème de Fubini sur la fonction $(x, y) \mapsto A(x, y)f(y)g(x)$. Celle-ci est intégrable si et seulement si
$$\int\int A(x, y)|f(y)||g(x)|\, dx\, dy < +\infty.$$

   Or, en utilisant l'inégalité de Hölder,
$$\int (T|f|)|g| \leqslant \|T|f|\|_p\|g\|_q < \infty$$

   Donc (Tonelli)
$$\iint A(x, y)|f(y)||g(x)|dxdy = \int \left(\int A(x, y)|f(y)|\, dy\right)|g(x)|\, dx = \int (T|f|)|g| < \infty$$

   On en déduit que $(x, y) \mapsto A(x, y)f(y)g(x)$ est intégrable et par le théorème de Fubini que $x \mapsto Tf(x)g(x)$ est mesurable. Il vient alors comme dans 2.(d) que $x \mapsto Tf(x)$ est mesurable.

   (c) $\|Tf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^p dx$ et $|Tf(x)| \leqslant (T|f|)(x)$. Donc $\|Tf\|_p \leqslant \|T|f|\|_p \leqslant C_0\|f\|_p$ et $Tf \in L^p(\mathbb{R})$.

(d) On pose $A(x,y) = u(x-y)$ avec $u \in L^1(\mathbb{R})$ et à valeurs positives. Alors A vérifie les conditions de l'énoncé avec $C_0 = \|u\|_1$, et

$$Tv(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} u(x-y)v(y)dy = u * v(x).$$

On retrouve la définition du produit de convolution $u * v \in L^p$ lorsque $v \in L^p$ et $\|u * v\|_p \leqslant \|u\|_1 \|v\|_p$.

Exercice 2 -

1. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \begin{cases} \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \neq 0 \pmod{2\pi} \\ 2n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. L_n est clairement linéaire par linéarité de l'intégrale. Elle est continue car pour tout f dans $C^0([-\pi, \pi])$,

$$|L_n(f)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt \right| \leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

On a donc

$$|||L_n||| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt.$$

3. On a déjà la majoration, donc il suffit d'une minoration. Soit $g_p(t) = \frac{D_n(t)}{|D_n(t)|+1/p}$. Cette fonction est continue de norme $\|g_p\|_\infty \leqslant 1$. De plus

$$|L_n(g_p)| = L_n(g_p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)| + 1/p} dt$$

On applique le théorème de convergence dominée, avec la domination $|D_n(t)|$ qui est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ (fonction continue bornée). Ainsi $|L_n(g_p)| \to \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$ quand $p \to \infty$. Et donc $|||L_n||| \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt$.

4. On peut observer que

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(v)/v| dv \geqslant \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(v)| dv = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(v) dv = \frac{2}{k\pi}$$

qui est le terme général d'une série divergente.

5. On calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = 2 \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right| dt \geqslant 2 \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{t} \right| dt = 2 \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \left| \frac{\sin(v)}{v} \right| dv$$

Il suffit alors d'appliquer la question précédente.

6. Ici $E = C^0([-\pi, \pi])$ muni de la norme uniforme (qui est complet), et $G = \{L_n, n \geqslant 0\}$. Etant donné la question 5, on n'est pas dans le cas où $(|||L_n|||)_{n \geqslant 0}$ est bornée, donc il existe $f \in E$ telle que $\sup_{n \geqslant 0} |L_n(f)| = +\infty$. Or la série de Fourier de f en 0 est la limite de $L_n(f)$, donc elle diverge.