# Devoir n°2

**Exercice 1 -** On se donne une fonction positive $A$, mesurable sur $\mathbb{R}^2$. On suppose de plus qu'il existe $C_0 > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,dy \leqslant C_0 \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R},$$
$$\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,dx \leqslant C_0 \qquad \text{pour presque tout } y \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que si $f$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto A(x,y)f(y)$ est mesurable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on définit une fonction $Tf$ par
$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} A(x,y)f(y)\,dy \tag{1}$$
pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et que $|Tf(x)| \leqslant C_0||f||_\infty$.
   (b) Montrer que pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, l'application $(x,y) \mapsto A(x,y)f(y)g(x)$ est intégrable.
   (c) En déduire que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $x \mapsto Tf(x)g(x)$ est mesurable.
   (d) En déduire que $T$ définit un opérateur linéaire borné de $L^\infty(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$, de norme $\|T\|_{\infty,\infty} \leqslant C_0$ .
3. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la fonction $y \mapsto A(x,y)f(y)$ est intégrable (en $y$) pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la formule (1) définit une fonction $Tf$ dans $L^1(\mathbb{R})$, et $||Tf||_1 \leqslant C_0||f||_1$.
4. On se donne maintenant un exposant $p \in ]1,+\infty[$ et une fonction $f$ mesurable positive sur $\mathbb{R}$, et on définit $Tf(x) \in [0,+\infty]$ par (1).
   (a) Dire pourquoi $Tf$ est mesurable.
   (b) Montrer que
$$Tf(x) \leqslant C_0^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} A(x,y)f(y)^p\,dy \right\}^{1/p}$$
   (c) En déduire que $||Tf||_p^p \leqslant C_0^p||f||_p^p$.
5. On suppose maintenant que $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour un $p \in ]1,+\infty[$, mais sans supposer que $f$ est à valeurs positives.
   (a) Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto A(x,y)f(y)$ est intégrable en $y$ (ce qui permet de définit $Tf(x)$ par (1), en décidant de poser $Tf(x) = 0$ sur l'ensemble négligeable restant).
   (b) Soit $q$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Montrer que pour toute fonction $g \in L^q(\mathbb{R})$ $x \mapsto Tf(x)g(x)$ est mesurable, et en déduire que que $Tf$ est mesurable.

(c) Montrer que $Tf \in L^p(\mathbb{R})$, et que $||Tf||_p \leqslant C_0||f||_p$.

6. On pose $A(x,y) = u(x-y)$ avec $u \in L^1(\mathbb{R})$ et à valeurs positives. Montrer que $A$ vérifie les conditions de l'énoncé et montrer que l'on retrouve la définition du produit de convolution $u * v \in L^p$ lorsque $v \in L^p$, et que $||u * v||_p \leqslant ||u||_1||v||_p$ .

**Exercice 2 -**

Pour tout $n \geqslant 0$, on considère l'application

$$\begin{array}{rrcl} L_n : & (C^0([-\pi,\pi]), \| \, \|_\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) \end{array}$$

On note $D_n$ le noyau de Dirichlet.

1. Rappeler les deux expressions du noyau de Dirichlet.
2. Montrer que $L_n$ est une application linéaire continue.
3. Montrer que sa norme d'opérateur vaut $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt$.
4. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty |\sin(v)/v|dv$ diverge.
5. Montrer que $\|\!|L_n|\!\|$ tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser le changement de variable $v = (n+\frac{1}{2})t$).
6. En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus énoncé ci-dessous, montrer qu'il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0.

   *Théorème de Banach-Steinhaus : Soit $E$ un espace de Banach, $F$ un espace vectoriel normé, et $G$ une famille d'applications linéaires continues de $E$ dans $F$. Ou bien $(\|\!|\ell|\!\|)_{\ell \in G}$ est bornée, ou bien il existe $x \in E$ tel que $\sup_{\ell \in G} \|\ell(x)\| = +\infty$.*