L3 MFA Math 302 Orsay 2017-18
Intégrale de Lebesgue

# Devoir n°1

**Exercice 1 -** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \in ]0,\infty[$. Soit $\alpha > 0$ un paramètre fixé et soit $(a_n)$ la suite définie par

$$a_n = \int n \ln\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right) dx.$$

1. Premier cas : on suppose que $0 < \alpha < 1$.
   (a) Montrer que $m(f \neq 0) > 0$.
   (b) A l'aide du lemme de Fatou, montrer que la suite $(a_n)$ tend vers $+\infty$.
2. Deuxième cas : on suppose que $\alpha = 1$. Montrer que la suite $(a_n)$ tend vers $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$.
3. Troisième cas : on suppose que $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que pour tout $x > 0$, $(1 + x^{\alpha}) \leq (1 + x)^{\alpha}$ puis que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x^{\alpha})}{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)$ tend vers 0.

**Exercice 2 -** Soit $f : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ une fonction intégrable . Pour $t \geq 0$, on pose

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{1 + tf(x)^2}}\ dx.$$

1. Montrer que $F$ est finie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.
2. Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$.
*(pour la majoration de la dérivée, on pourra considérer la partition* $(\{f < 1\}, \{f \geq 1\})$*).*
3. Montrer que la quantité $(F(t) - F(0))/t$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $t \to 0$.
4. Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier $f$ pour que $F$ soit de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^+$?