Interrogation 2

Exercice 1

1) Soient X et Y deux variables aléatoires continues indépendantes. On note f_X la densité de X et f_Y la densité de Y. Donner la loi jointe de (X, Y), c'est-à-dire la densité du couple (X, Y).
2) Donner la densité de $Z = X + Y$.
3) Plus généralement, soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = 1$ et $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. On s'intéresse à la somme $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.
4) Enoncer la loi forte des grands nombres.
5) Que peut-on dire de $\dfrac{S_n}{n}$ lorsque n tend vers l'infini ?
6) Que peut-on dire de $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité jointe

$$f(x, y) = \frac{x}{2} y^{x-1} \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \mathbb{1}_{]0,1[}(y).$$

On donne :

$$\int_0^2 \frac{x}{x+1} dx = 2 - \ln(3), \qquad \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \ln(3).$$

1) Calculer la densité de X. Quelle loi retrouve-t-on ?
2) En déduire $\mathbb{E}(X)$.
3) Soit α un réel, donner une formule reliant $\mathbb{E}(X^\alpha Y)$ et f.
4) Montrer que, pour tout réel α,

$$\mathbb{E}(X^\alpha Y) = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^{\alpha+1}}{x+1} dx.$$

5) En déduire $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
6) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
7) Les deux variables X et Y sont-elles indépendantes ?