Examen

Documents non autorisés. Calculatrices non autorisées. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.

Exercice 1

Un fabriquant de pédaliers de vélo veut produire des boîtiers dont le diamètre est de 41mm, avec une tolérance autorisée égale à +0.00mm/ − 0.10mm (standard Pressfit GXP). Autrement dit, pour pouvoir être utilisées, les pièces qu'il produit doivent avoir un diamètre au moins égal à 40.9mm, et au plus égal à 41mm. Il étudie deux procédés de fabrication, qui donnent des pièces dont le diamètre X ou Y suit :

- dans le premier cas, une loi de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 40\, e^{-40(41-x)} & \text{si } x \leq 41, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- dans le second cas, une loi de densité

$$f_Y(y) = \frac{40}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-800(y-40.95)^2}.$$

On ne fera pas attention au fait que dans ces modèles, le diamètre X ou Y pourrait être négatif (ceci arrive avec une probabilité quasiment nulle).

I. 1) Soit $T = 41 - X$. Montrer que la fonction de répartition de T peut s'écrire $F_T(t) = \mathbb{P}(X \geq 41 - t)$.

2) Montrer que, si $t \geq 0$, $F_T(t) = \int_0^t 40e^{-40u}du$.

3) Montrer que T suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(40)$.

4) Donner l'espérance et la variance de T.

5) Donner l'espérance et la variance de X en fonction de $\mathbb{E}(T)$ et $\text{var}(T)$. En déduire la valeur numérique de $\mathbb{E}(X)$ et $\text{var}(X)$.

6) Montrer que $\mathbb{P}(0 \leq T \leq 1/10) = 1 - e^{-4}$.

7) On donne $e^{-4} \leq 0.02$. Construire un intervalle I tel que $X \in I$ avec probabilité au moins 98%.

II. 1) Quelle est la loi de Y ? (donner le nom de la loi et la valeur des paramètres)

2) Donner (sans calcul) l'espérance et la variance de Y.

3) Quelle est la loi de $40(Y - 40.95)$?

4) Soit Z une variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et de variance 1. Faites un desssin approximatif de l'allure de la densité de Z.

5) Sur le dessin précédent, indiquer comment calculer graphiquement $P(|Z| > 2)$.

6) Calculer $\mathbb{P}(|Z| > 2)$ en fonction de $F_Z(2)$ où F_Z est la fonction de répartition de Z. Calculer aussi $\mathbb{P}(|Z| \leq 2)$.
7) On donne $F_Z(2) \leq 0.98$. Montrer que $\mathbb{P}(|Z| \leq 2) \leq 0.96$.
8) Donner un lien entre Y et Z.
9) Construire un intervalle J tel que $Y \in J$ avec probabilité au plus 96%.

III. Quel procédé permet de produire avec moins de 2% de pertes des boîtiers de pédalier utilisables ?

Exercice 2

Une espèce d'antilope peut avoir des portées de 1 à 3 petits. La portée se compose d'un seul petit avec probabilité 3/10, 2 petits avec probabilité 1/5, 3 petits avec probabilité 1/2. Mais la loi de la jungle est dure et chaque petit n'a qu'une chance sur 3 de survivre jusqu'à l'âge de un an, et ce indépendamment du devenir des autres petits. On note X le nombre de petits dans une portée et Y le nombre de petits d'une portée qui arrivent à l'âge de un an.

1) Quelles sont les valeurs prises par la variable X ? par la variable Y ?
2) Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3) Quelle est la loi de Y conditionnellement à $X = 3$? En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Y = l, X = 3)$ pour tout l.
4) Le tableau suivant donne la loi jointe du couple (X, Y) :

$X \backslash Y$	0	1	2	3
1	$\frac{3}{10} \times \frac{2}{3}$	$\frac{3}{10} \times \frac{1}{3}$	0	0
2	$\frac{1}{5} \times \frac{4}{9}$	$\frac{1}{5} \times \frac{4}{9}$	$\frac{1}{5} \times \frac{1}{9}$	0
3				

Compléter la dernière ligne.

5) Expliquer comment on pourrait déterminer la loi de Y à partir du tableau.
6) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes identiquement distribuées, de loi continue de densité

$$f(x) = \begin{cases} 3\theta^3 x^{-4} & \text{si } x > \theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Montrer que $\mathbb{E}(X_1) = 3\theta/2$.
2) En déduire un estimateur sans biais $\hat{\theta}_n$ de θ.

3) Enoncer la loi faible des grands nombres pour les variables X_i.
4) Montrer que l'estimateur $\hat{\theta}_n$ est consistant.
5) On admet que $\mathrm{var}(X_1) = 3\theta^2/4$. Enoncer le Théorème Central Limite pour les variables X_i.
6) Quelle propriété peut-on en déduire pour $\hat{\theta}_n$?
7) On admet que si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 95\%$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n - 1.96\sqrt{\frac{\theta^2}{3n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + 1.96\sqrt{\frac{\theta^2}{3n}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 95\%.$$

8) En utilisant le lemme de Slutsky, montrer que

$$\sqrt{\frac{3n}{\hat{\theta}_n^2}}\left(\hat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

9) Construire un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95%.